PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

JUNIO – 2021

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan.

1º) Estudia el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible.

$$\begin{cases} (a-1)x - y = 3 \\ (a-1)x + (a+1)y - (2-a)z = -2a \\ (-2a+2)x - ay + (a^2-a-2)z = 3a-1 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} a-1 & -1 & 0 \\ a-1 & a+1 & a-2 \\ -2a+2 & -a & a^2-a-2 \end{pmatrix} y$$

$$M' = \begin{pmatrix} a-1 & -1 & 0 & 3 \\ a-1 & a+1 & a-2 & -2a \\ -2a+2 & -a & a^2-a-2 & 3a-1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente, teniendo en cuenta que $a^2-a-2=(a+1)(a-2)$:

$$|M| = \begin{vmatrix} a-1 & -1 & 0 \\ a-1 & a+1 & a-2 \\ -2(a-1) & -a & (a+1)(a-2) \end{vmatrix} =$$

$$= (a-1)(a-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & a+1 & 1 \\ -2 & -a & a+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a-1)(a-2)\cdot[(a+1)^2+2+a+(a+1)] =$$

$= (a-1)(a-2)\cdot(a^2+2a+1+3+2a) = (a-1)(a-2)\cdot(a^2+4a+4) =$

$(a-1)(a-2)\cdot(a+2)^2 = 0 \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = a_4 = -2.$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a \neq 1 \\ a \neq 2 \\ a \neq -2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 12 - 3 + 4 = -11 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$Para\ a = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \\ -2 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \\ -2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 6 - 8 + 18 - 8 + 5 = 16 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a = 1 \\ a = 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a = -2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 3 \\ -3 & -1 & -4 & 4 \\ 6 & 2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 + 2F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 = -F_3\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ a = -2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Se resuelve, en primer lugar, para $a \neq 1\ y\ a \neq 2$:

$$\begin{pmatrix} a-1 & -1 & 0 & 3 \\ a-1 & a+1 & a-2 & -2a \\ -2a+2 & -a & a^2-a-2 & 3a-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 + 2F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a-1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & a+2 & a-2 & -2a-3 \\ 0 & -a-2 & a^2-a-2 & 3a+5 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 + F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a-1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & a+2 & a-2 & -2a-3 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a+2 \end{pmatrix} \Rightarrow F_3 \to \frac{F_3}{a+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a-1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & a+2 & a-2 & -2a-3 \\ 0 & 0 & a-2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (a-2)z = 1;\ \ z = \frac{1}{a-2}.$$

$$(a+2)y + (a-2)z = -2a-3;\ \ (a+2)y + (a-2)\cdot\frac{1}{a-2} = -2a-3;$$

$(a+2)y + 1 = -2a-3;\ \ (a+2)y = -2a-4 = -2(a+2) \Rightarrow y = -2.$

$(a-1)x - y = 3;\ \ (a-1)x + 2 = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{a-1}.$

$$\underline{Solución: x = \frac{1}{a-1}, y = -2, z = \frac{1}{a-2}, \forall a \in R - \{-2, 1, 2\}.}$$

Resolvemos ahora para $a = -2$. El sistema resulta $\left.\begin{array}{r} -3x - y = 3 \\ -3x - y - 4z = 4 \\ 6x + 2y + 4z = -7 \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado. Despreciando una ecuación, por ejemplo, la tercera, y haciendo $x = \lambda$:

$y = -3 - 3\lambda$. Restando a la segunda ecuación la primera: $-4z = 1 \Rightarrow z = -\frac{1}{4}$.

$$\underline{Solución: x = \lambda, y = -3 - 3\lambda, z = -\frac{1}{4}, \forall \lambda \in R.}$$

****

2º) Calcula los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $|A^3| = 8$, siendo $A = \begin{pmatrix} t-1 & t+1 & 3 \\ t^2-t & t^2+2t & t \\ 1-t & -1-t & -2 \end{pmatrix}$.

$$|A^3| = 8 \Rightarrow |A \cdot A \cdot A| = |A| \cdot |A| \cdot |A| = (|A|)^3 = 8 = 2^3 \Rightarrow |A| = 2.$$

$$\begin{vmatrix} t-1 & t+1 & 3 \\ t^2-t & t^2+2t & t \\ 1-t & -1-t & -2 \end{vmatrix} = 2; \quad \begin{vmatrix} t-1 & t+1 & 3 \\ t(t-1) & t(t+2) & t \\ -(t-1) & -1-t & -2 \end{vmatrix} = 2;$$

$$(t-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & t+1 & 3 \\ t & t^2+2t & t \\ -1 & -1-t & -2 \end{vmatrix} = 2. \quad (*)$$

El valor del determinante $\begin{vmatrix} 1 & t+1 & 3 \\ t & t^2+2t & t \\ -1 & -1-t & -2 \end{vmatrix}$ es el siguiente:

$$-2(t^2+2t) - 3t(1+t) - t(t+1) + 3(t^2+2t) + t(1+t) + 2t(1+t) =$$

$$= (t^2+2t) - t(1+t) = t^2 + 2t - t - t^2 = t.$$

Sustituyendo en (*) teniendo en cuanta el valor del determinante:

$$(t-1) \cdot t = 2; \;\; t^2 - t - 2 = 0; \;\; t = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \underline{t_1 = -2, t_2 = 2}.$$

****

3º) Encuentra la ecuación general del plano π que es paralelo a las rectas de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} x+2y+z+3=0 \\ x+6y-z-7=0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+2}{1}$ y equidista de ambas.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x+2y+z+3=0 \\ x+6y-z-7=0 \end{cases} \Rightarrow y=\lambda \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+z=-3-2\lambda \\ x-z=7-6\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x=4-8\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=2-4\lambda; \quad \left.\begin{matrix} x+z=-3-2\lambda \\ -x+z=-7+6\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2z=-10+4\lambda: \ z=-5+2\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=2-4\lambda \\ y=\lambda \\ z=-5+2\lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de r son $P(2,0,-5)$ y $\overrightarrow{v_r}=(-4,1,2)$.

Un punto y un vector director de s son $Q(3,-2,-2)$ y $\overrightarrow{v_s}=(3,3,1)$.

El vector normal del plano π es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas, por lo cual, es linealmente dependiente del producto vectorial de sus vectores directores:

$$\vec{n}=\overrightarrow{v_r}\times\overrightarrow{v_s}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}=i+6j-12k-3k-6i+4j=$$

$$=-5i+10j-15k \Rightarrow \vec{n}=(1,-2,3).$$

El plano π es de la forma $\pi \equiv x-2y+3z+D=0$.

Por ser paralelo el plano a las rectas, la distancia del plano a cada una de las rectas es equivalente a la distancia del plano a cualquier punto de las rectas.

Teniendo en cuente lo anterior y por ser equidistante de las rectas se cumple que:

$$\left.\begin{matrix} d(\pi,r)=d(\pi,P) \\ d(\pi,s)=d(\pi,Q) \end{matrix}\right\} \Rightarrow d(\pi,r)=d(\pi,s) \Rightarrow d(\pi,P)=d(\pi,Q).$$

La distancia del punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ al plano $Ax+By+Cz+D=0$ viene dada por la fórmula $d(P_0,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la fórmula al plano $\pi \equiv x-2y+3z+D=0$ y a los puntos

$P(2,0,-5)$ y $Q(3,-2,-2)$:

$$d(\pi,P)=\frac{|1\cdot 2-2\cdot 0+3\cdot(-5)+D|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}}=\frac{|2-0-15+D|}{\sqrt{1+4+9}}=\frac{|-13+D|}{\sqrt{14}}.$$

$$d(\pi,Q)=\frac{|1\cdot 3-2\cdot(-2)+3\cdot(-2)+D|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}}=\frac{|3+4-6+D|}{\sqrt{14}}=\frac{|1+D|}{\sqrt{14}}.$$

$$d(\pi,P)=d(\pi,Q)\Rightarrow\frac{|-13+D|}{\sqrt{14}}=\frac{|1+D|}{\sqrt{14}};\ \ |-13+D|=|1+D|\Rightarrow$$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{r}-13+D=1+D\\-13+D=-1-D\end{array}\right\}$. La solución de la primera ecuación carece de sentido lógico, por lo cual:

$$-13+D=-1-D;\ \ 2D=12\Rightarrow D=6.$$

$$\underline{\pi\equiv x-2y+3z+6=0}.$$

****

4º) Un lado de un paralelogramo está sobre la recta $r \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$. Otro lado lo determinan los puntos $A(-1,-2,3)\ y\ B(2,-2,-1)$. Calcula los otros dos vértices del paralelogramo sabiendo que su perímetro mide 16 unidades.

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (2,1,-2)$.

Los puntos $A(-1,-2,3)\ y\ B(2,-2,-1)$ determinan el vector:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(2,-2,-1) - (-1,-2,3)] = (3,0,-4).$$

La longitud del lado $\overline{AB}$ es la siguiente:

$$\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+0+16} = \sqrt{25} = 5\ unidades.$$

Como el perímetro del paralelogramo es de 16 unidades, la longitud del lado $\overline{BC}$ es la siguiente:

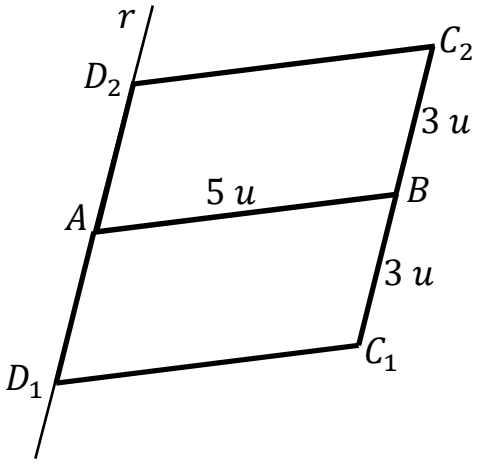
$$16 = 2 \cdot \left(5 + \overline{BC}\right);\ \ 8 = 5 + \overline{BC} \Rightarrow \overline{BC} = 3\ unidades.$$

Se comprueba a continuación si alguno de los puntos, A o B, pertenecen a la recta r:

$$\left.\begin{array}{r} r \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2} \\ A(-1,-2,3) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-1-1}{-2} = \frac{-2+1}{-1} = \frac{3-1}{2} \Rightarrow A \in R.$$

Evidentemente, el punto $B \notin r$, por ser linealmente independientes los vectores $\overrightarrow{v_r} = (2,1,-2)$ y $\overrightarrow{AB} = (3,0,-4)$.

La situación, aproximada, es la que indica el gráfico adjunto.



La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente: $r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -1 - \lambda. \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$

Un punto genérico de la recta r es el siguiente: $D(1-2\lambda\,, -1-\lambda\,, 1+2\lambda)$.

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = [(1-2\lambda\,, -1-\lambda\,, 1+2\lambda) - (-1,-2,3)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = (2-2\lambda\,, 1-\lambda\,, -2+2\lambda).$$

$$\overline{AD} = \left|\overrightarrow{AD}\right| = 3\,u \Rightarrow \sqrt{(2-2\lambda)^2 + (1-\lambda)^2 + (-2+2\lambda)^2} \Rightarrow$$

$$3^2 = 4 - 8\lambda + 4\lambda^2 + 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 4 - 8\lambda + 4\lambda^2;\;\; 9 = 9\lambda^2 - 18\lambda + 9;$$

$$9\lambda^2 - 18\lambda = 0;\;\; \lambda^2 - 2\lambda = 0;\;\; \lambda(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_1 = 2.$$

$\lambda_1 = 0 \Rightarrow D_1(1\,,-1\,,1).$ $\qquad \overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{BC_1}.$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{OD_1} - \overrightarrow{OA} = [(1,-1,1) - (-1,-2,3)] = (2,1,-2) \\ \overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OB} = [(x,y,z) - (2,-2,-1)] = (x-2, y+2, z+1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2,1,-2) = (x-2, y+2, z+1) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x - 2 = 2 \rightarrow x = 4 \\ y + 2 = 1 \rightarrow y = -1 \\ z + 1 = -2 \rightarrow z = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow C_1(4\,,-1\,,-3).$$

Primera solución: $\underline{C_1(4\,,-1\,,-3)\ y\ D_1(1,-1\,,1)}.$

$\lambda_2 = 2 \Rightarrow D_2(-3\,,-3\,,5).$ $\qquad \overrightarrow{AD_2} = \overrightarrow{BC_2}.$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AD_2} = \overrightarrow{OD_2} - \overrightarrow{OA} = [(-3\,,-3\,,5) - (-1,-2,3)] = (-2,-1,2) \\ \overrightarrow{BC_2} = \overrightarrow{OC_2} - \overrightarrow{OB} = [(x,y,z) - (2,-2,-1)] = (x-2, y+2, z+1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-2,-1,2) = (x-2, y+2, z+1) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x - 2 = -2 \rightarrow x = 0 \\ y + 2 = -1 \rightarrow y = -3 \\ z + 1 = 2 \rightarrow z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow C_2(0\,,-3\,,1).$

Segunda solución: $\underline{C_2(0,-3,1)\ y\ D_2(-3\,,-3\,,5)}.$

****

5º) Sea la función $f(x) = (x^2 - 3x + 10)^{\log\left[2^{x-1} \cdot sen\, \frac{\pi(x+2)}{6}\right]}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1, 3]$.

b) Demuestra que existe $\alpha \in (1, 3)$ tal que $f(\alpha) = \frac{3}{2}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

---

a)

La función $f(x)$ es la expresión de la potencia de dos funciones de la forma: $f(x) = g(x)^{h(x)}$. Para que $f(x)$ sea continua en $[1, 3]$ tienen que serlo $f(x)$ y $g(x)$.

La función $g(x) = x^2 - 3x + 10$ es continua en R, por lo cual lo será en cualquier intervalo finito que se considere.

La función $h(x)$ es logarítmica y, por ello, continua en $[0, \infty)$.

Siendo $h(x) = m(x) \cdot n(x)$, con $m(x) = 2^{x-1}\ y\ n(x) = sen\ \frac{\pi(x+2)}{6}$, para que sea $h(x)$ estrictamente positiva es necesario que $m(x)\ y\ n(x)$ sean estrictamente positivas o estrictamente negativas.

$m(x) = 2^{x-1} > 0, \forall x \in R.$

Estudiamos ahora el signo de la función $n(x) = sen\ \frac{\pi(x+2)}{6}$ en el intervalo $[1, 3]$, para lo cual se estudia su signo en los puntos $x = 1, 2\ y\ 3$:

$n(1) = sen\ \frac{\pi(1+2)}{6} = sen\ \frac{3\pi}{6} = sen\ \frac{\pi}{2} = 1 > 0.$

$n(2) = sen\ \frac{\pi(2+2)}{6} = sen\ \frac{4\pi}{6} = sen\ \frac{2\pi}{3} = sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0.$

$n(3) = sen\ \frac{\pi(3+2)}{6} = sen\ \frac{5\pi}{6} = sen\ 150° = sen\ 30° = \frac{1}{2} > 0.$

Como quiera que en el intervalo $[1, 3]$ es $m(x) > 0\ y\ n(x) > 0$:

$\underline{Queda\ demostrado\ que\ f(x)\ es\ continua\ en\ [1, 3]}.$

b)

Para demuestra que existe $\alpha \in (1, 3)$ tal que $f(\alpha) = \frac{3}{2}$ se tiene en cuenta que la función $f(x)$ es continua en $[1, 3]$, como se demostró en el apartado anterior.

Teniendo en cuanta el teorema de los valores intermedios o desigualdad de Darboux, que dice que, “si una función es continua en un intervalo $[a, b]$ toma todos los

valores comprendidos entre $f(a)\ y\ f(b)$ al menos una vez".

$$f(1) = (1^2 - 3 \cdot 1 + 10)^{\log\left[2^{1-1} \cdot sen\, \frac{\pi(1+2)}{6}\right]} = 8^{\log\left(2^0 \cdot sen\, \frac{\pi}{2}\right)} = 8^{\log(1 \cdot 1)} =$$

$$= 8^{\log 1} = 8^0 = 1.$$

$$f(3) = (3^2 - 3 \cdot 3 + 10)^{\log\left[2^{3-1} \cdot sen\, \frac{\pi(3+2)}{6}\right]} = 10^{\log\left(2^2 \cdot sen\, \frac{5\pi}{6}\right)} =$$

$$= 10^{\log(4 \cdot sen\, 150°)} = 10^{\log(4 \cdot sen\, 30°)} = 10^{\log\left(4 \cdot \frac{1}{2}\right)} = 10^{\log 2} = 2.$$

$$1 < \frac{3}{2} < 2 \Rightarrow \underline{Existe\ al\ menos\ un\ \alpha \in (1,3)\ tal\ que\ \ f(\alpha) = \frac{3}{2}, c.q.d.}$$

También se puede resolver este apartado de la forma siguiente:

Demostrar que existe $\alpha \in (1,3)$ tal que $f(\alpha) = \frac{3}{2}$ es equivalente a demostrar que la función $g(x) = f(x) - \frac{3}{2}$ tiene una raíz real en el intervalo $[0,1]$.

$$g(x) = (x^2 - 3x + 10)^{\log\left[2^{x-1} \cdot sen\, \frac{\pi(x+2)}{6}\right]} - \frac{3}{2}.$$

El teorema de Bolzano dice que "si $g(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a,b)$ tal que $g(c) = 0$".

A la función $g(x)$ le es aplicable el teorema de Bolzano en el intervalo $[1,3]$:

$$g(1) = f(1) - \frac{3}{2} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} < 0. \qquad g(3) = f(3) - \frac{3}{2} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} > 0.$$

Lo anterior demuestra que $g(x)$ tiene al menos una raíz real en $[1,3]$ y también los pedido, o sea, que:

$$\underline{Existe\ al\ menos\ un\ \alpha \in (1,3)\ tal\ que\ \ f(\alpha) = \frac{3}{2}, c.q.d.}$$

****

6º) Calcula las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^3-4x-1}{x^2-4}$ y estudia la posición de la curva respecto de ellas.

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-4x-1}{x^2-4} = \pm\infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \underline{Las\ rectas\ x = -2\ y\ x = 2\ son\ asíntotas\ verticales}.$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^-} \frac{x^3-4x-1}{(x+2)(x-2)} = \frac{-8+8-1}{0^-\cdot(-4)} = \frac{-1}{0^+} \Rightarrow \underline{\lim_{x\to-2^-} f(x) = -\infty}.$$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+} \frac{x^3-4x-1}{(x+2)(x-2)} = \frac{-8+8-1}{0^+\cdot(-4)} = \frac{-1}{0^-} \Rightarrow \underline{\lim_{x\to-2^+} f(x) = +\infty}.$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} \frac{x^3-4x-1}{(x+2)(x-2)} = \frac{8-8-1}{4\cdot0^-} = \frac{-1}{0^-} \Rightarrow \underline{\lim_{x\to2^-} f(x) = +\infty}.$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+} \frac{x^3-4x-1}{(x+2)(x-2)} = \frac{8-8-1}{4\cdot0^+} = \frac{-1}{0^+} \Rightarrow \underline{\lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty}.$$

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$, con m finito y $m \neq 0$.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3-4x-1}{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-4x-1}{x^3-4x} = 1.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3-4x-1}{x^2-4} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-4x-1-x^3+4}{x^2-4} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-4x+3}{x^2-4} = 0.$$

$$\underline{Asíntota\ oblicua: y = x}.$$

****

7º) Sea la función $f(x) = L\frac{5x-2-x\cdot sen\frac{\pi x}{2}}{x^2-4x+6}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1,3]$.

b) Demuestra que exista $a \in (1,3)$ tal que $f'(a) = \frac{3}{2}\cdot L2$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

---

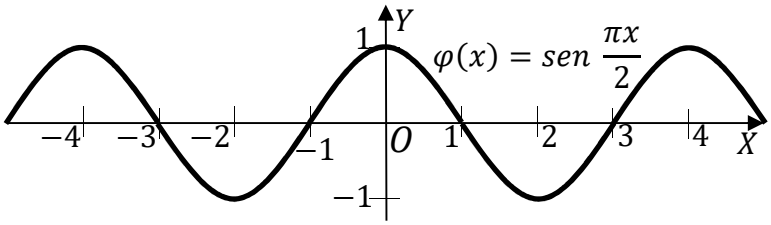
a)

Por ser $f(x)$ una función logarítmica es necesario que en el intervalo $[1,3]$ sea positiva la expresión $\frac{5x-2-x\cdot sen\frac{\pi x}{2}}{x^2-4x+6}$, para lo cual tienen que ser positivas en el mismo intervalo las funciones $g(x) = 5x - 2 - x\cdot sen\,\frac{\pi x}{2}$ y $h(x) = x^2 - 4x + 6$.

La función $g(x) = 5x - 2 - x\cdot sen\,\frac{\pi x}{2}$ es continua en R por ser suma, resta o producto de funciones continuas en R y la función $h(x) = x^2 - 4x + 6$ es continua en R por ser polinómica, por lo cual, ambas funciones son continuas en cualquier intervalo finito que se considere, en particular, en el intervalo $[1,3]$.

Para estudiar el signo de la función $g(x) = 5x - 2 - x\cdot sen\,\frac{\pi x}{2}$ en el intervalo $[1,3]$ se estudia, en particular, el valor de $sen\,\frac{\pi x}{2}$.

La función $\varphi(x) = sen\,\frac{\pi x}{2} < 0$ en $(1,3)$, como se observa en la representación gráfica, aproximada de $\varphi(x)$, que es la figura adjunta.



Siendo $sen\,\frac{\pi x}{2} < 0$ en $(1,3)$, la función $g(x) = 5x - 2 - x\cdot sen\,\frac{\pi x}{2}$ es estrictamente positiva.

Se estudia ahora la función $f(x)$.

$x^2 - 4x + 6 = 0;\;\; x = \frac{4\pm\sqrt{16-24}}{2} \Rightarrow x \notin R \Rightarrow x^2 - 4x + 6 > 0, \forall x \in R$, lo que significa que $h(x) = x^2 - 4x + 6 > 0, \forall x \in R$.

$\underline{Lo\ anterior\ demuestra\ que\ f(x)\ es\ continua\ en\ [1,3].}$

b)

El teorema del valor medio o de Lagrange dice que “si una función es continua

en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces $\exists c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$".

Aplicando el teorema de Lagrange a la función $f(x) = L\frac{5x-2-x\cdot sen\frac{\pi x}{2}}{x^2-4x+6}$ en el intervalo $[1,3]$:

$$f(3) = L\frac{5\cdot 3-2-3\cdot sen\frac{3\pi}{2}}{3^2-4\cdot 3+6} = L\frac{15-2-3\cdot(-1)}{9-12+6} = L\frac{16}{3} = L16 - L3.$$

$$f(1) = L\frac{5\cdot 1-2-1\cdot sen\frac{\pi}{2}}{1^2-4\cdot 1+6} = L\frac{5-2-1\cdot 1}{9-12+6} = L\frac{2}{3} = L2 - L3.$$

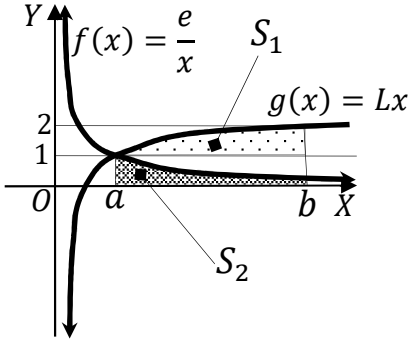
$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(c) = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{L16-L3-(L2-L3)}{2} = \frac{L16-L3-L2+L3}{2} =$$

$$= \frac{L16-L2}{2} = \frac{L2^4-L2}{2} = \frac{4\cdot L2-L2}{2} = \frac{3L2}{2}.$$

$$\underline{Queda\ demostrado\ que\ \exists a \in (1,3)\ tal\ que\ f'(a) = \frac{3}{2}\cdot L2.}$$

****

8º) Calcula los valores de las abscisas a y b que aparecen en el gráfico adjunto, y, después, comprueba que las áreas de las dos regiones sombreados son iguales.



El valor de a se obtiene haciendo: $g(a) = La = 1 \Rightarrow \underline{a = e}$.

El valor de b se obtiene haciendo: $g(b) = Lb = 2 \Rightarrow \underline{b = e^2}$.

$$S_1 = \int_a^b [g(x) - 1]\, dx = \int_e^{e^2} (Lx - 1) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = Lx - 1 \rightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ dx = dv \rightarrow v = x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[(Lx - 1) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \right]_e^{e^2} = [x(Lx - 1) - \int dx]_e^{e^2} = [x(Lx - 1) - x]_e^{e^2} =$$

$$= [xLx - x - x]_e^{e^2} = [xLx - 2x]_e^{e^2} = (e^2 \cdot Le^2 - 2e^2) - (eLe - 2e) =$$

$$= e^2 \cdot 2Le - 2e^2 - e + 2e = 2e^2 - 2e^2 + e \Rightarrow \underline{S_1 = e\, u^2}.$$

$$S_2 = \int_a^b f(x) \cdot dx = \int_e^{e^2} \frac{e}{x} \cdot dx = [eLx]_e^{e^2} = e \cdot Le^2 - e \cdot Le = e \cdot 2Le - e =$$

$$= 2e - e \Rightarrow \underline{S_2 = e\, u^2}.$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ S_1 = S_2}.$$

****