

**PRUEBA DE ACCESO (EBAU)****UNIVERSIDAD DE NAVARRA****EXTRAORDINARIA – 2022**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

**MATEMÁTICAS II****Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan.

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real  $a$  y resuélvelo en los casos en que sea compatible.

$$\begin{cases} (a^2 - 1)x + ay + a^2z = 1 \\ (a^2 - 1)x + (a + 1)y + (a^2 + a)z = 2. \\ y + (a^2 + 2a)z = a + 2 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

-----

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} a^2 - 1 & a & a^2 \\ a^2 - 1 & a + 1 & a^2 + a \\ 0 & 1 & a^2 + 2a \end{pmatrix}; M' = \begin{pmatrix} a^2 - 1 & a & a^2 & 1 \\ a^2 - 1 & a + 1 & a^2 + a & 2 \\ 0 & 1 & a^2 + 2a & a + 2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro  $a$  es el siguiente:

$$\begin{aligned} |M| &= \begin{vmatrix} a^2 - 1 & a & a^2 \\ a^2 - 1 & a + 1 & a^2 + a \\ 0 & 1 & a^2 + 2a \end{vmatrix} \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 - F_1\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{vmatrix} a^2 - 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & a^2 + 2a \end{vmatrix} = (a^2 - 1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & a^2 + 2a \end{vmatrix} = (a^2 - 1)(a^2 + 2a - a) = \\ &= (a^2 - 1)(a^2 + a) = a(a + 1)^2(a - 1) \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = -1, a_3 = 1. \end{aligned}$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\text{Para } \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -1 \\ a \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.D.}$$

$$\text{Para } a = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 1 + 2 = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } M' = 3.$$

Para  $a = 0 \Rightarrow \text{Rang } M = 2; \text{Rang } M' = 3 \Rightarrow \text{Sistema incompatible.}$

$$\text{Para } a = -1 \Rightarrow \begin{cases} M' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2 = -C_3\} \Rightarrow \text{Rang } M' = 2 \\ M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M = 1 \end{cases}.$$

Para  $a = -1 \Rightarrow \text{Rang } M = 1; \text{Rang } M' = 2 \Rightarrow \text{Sistema incompatible.}$

$$\text{Para } a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_3 = C_4\} \Rightarrow \text{Rang } M' = 2$$

$$\text{Para } \begin{cases} a = -1 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.I.}$$

Se resuelve, en primer lugar, para  $a \neq 0, a \neq -1$  y  $a \neq 1$ :

$$\begin{pmatrix} a^2 - 1 & a & a^2 & 1 \\ a^2 - 1 & a + 1 & a^2 + a & 2 \\ 0 & 1 & a^2 + 2a & a + 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 - F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 - 1 & a & a^2 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a^2 + 2a & a + 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 - F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 - 1 & a & a^2 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a^2 + a & a + 1 \end{pmatrix} \Rightarrow z = \frac{a+1}{a^2+a} = \frac{a+1}{a(a+1)} \Rightarrow z = \frac{1}{a}.$$

$$y + a \cdot \frac{1}{a} = 1; \quad y + 1 = 1 \Rightarrow y = 0. \quad (a^2 - 1)x + a^2 \cdot \frac{1}{a} = 1; \quad (a^2 - 1)x = 1 - a;$$

$$(a + 1)(a - 1)x = -(a - 1); \quad (a + 1)x = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{a+1}.$$

$$\text{Solución: } x = \frac{-1}{a+1}, y = 0, z = \frac{1}{a}, \forall a \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}.$$

Resolvemos ahora para  $a = 1$ . El sistema resulta  $\left. \begin{array}{l} y + z = 1 \\ 2y + 2z = 2 \\ y + 3z = 3 \end{array} \right\}$ , equivalente al sistema  $\left. \begin{array}{l} y + z = 1 \\ y + 3z = 3 \end{array} \right\}$  que es compatible indeterminado. Haciendo  $x = \lambda$ :

$$\left. \begin{array}{l} y + z = 1 \\ y + 3z = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -y - z = -1 \\ y + 3z = 3 \end{array} \Rightarrow 2z = 2; \quad z = 1; \quad y = 0.$$

Solución:  $x = \lambda, y = 0, z = 1, \forall \lambda \in R$ .

\*\*\*\*\*

www.yoquieroaprobar.es

2º) Demuestra que se cumple  $|A \cdot B| = 0$  para toda matriz A de dimensión  $3 \times 2$ , siendo  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

-----

Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ .

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & a+2b \\ c & d & c+2d \\ e & f & e+2f \end{pmatrix}.$$

$$|A \cdot B| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & a+2b \\ c & d & c+2d \\ e & f & e+2f \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{aligned} & ad(e+2f) + cf(a+2b) + be(c+2d) - de(a+2b) - af(c+2d) - \\ & - bc(e+2f) = (a+2b)(cf - de) + (c+2d)(be - af) + (e+2f)(ad - bc) = \\ & = acf - ade + 2bcf - 2bde + bce - acf + 2bde - 2adf + ade - bce + \\ & + 2adf - 2bcf = 0. \end{aligned}$$

También puede hacerse de la forma siguiente:

$$\begin{vmatrix} a & b & a+2b \\ c & d & c+2d \\ e & f & e+2f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & a \\ c & d & c \\ e & f & e \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & 2b \\ c & d & 2d \\ e & f & 2f \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0.$$

En la realización del ejercicio se han utilizado las siguientes propiedades de los determinantes:

1ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en dicha línea el primero y el segundo sumandos, respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial.

2ª.- Si un determinante tiene dos líneas paralelas iguales o proporcionales su valor es cero.

$$\underline{|A \cdot B| = 0, \forall a, b, c, d, e, f, \text{ como se quería demostrar.}}$$

\*\*\*\*\*

3º) Calcula la ecuación general del plano  $\pi$  perpendicular al plano  $\alpha \equiv 2x - y - z - 1 = 0$ , sabiendo que contiene al punto  $P(-1, 2, 1)$  y que la intersección de ambos planos es una recta paralela a  $r \equiv \begin{cases} x + y - 2z - 3 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases}$ .

-----

La expresión de  $r$  por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 2z - 3 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda; \quad y = 3 + \lambda; \quad x = 3 + 2\lambda - 3 - \lambda = \lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{Un vector director de } r \text{ es } \vec{v}_r = (1, 1, 1).$$

También se puede obtener un vector director de  $r$  de la forma siguiente:

Un vector director de la recta  $r$  es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son  $\vec{n}_1 = (1, 1, -2)$  y  $\vec{n}_2 = (0, 1, -1)$ .

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -i + k + 2i + j = i + j + k \Rightarrow \vec{v}_r = (1, 1, 1).$$

Un vector normal del plano  $\alpha \equiv 2x - y - z - 1 = 0$  es  $\vec{n} = (2, -1, -1)$ .

La expresión general del plano  $\pi$  pedido es la siguiente:

$$\pi(P; \vec{v}_r, \vec{n}) \equiv \begin{vmatrix} x + 1 & y - 2 & z - 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-(x + 1) + 2(y - 2) - (z - 1) - 2(z - 1) + (x + 1) + (y - 2) = 0;$$

$$3(y - 2) - 3(z - 1) = 0; \quad y - 2 - z + 1 \Rightarrow \underline{\pi \equiv y - z - 1 = 0}.$$

\*\*\*\*\*

4º) Encuentra los puntos de la recta  $r \equiv \begin{cases} 3x - y + z - 6 = 0 \\ x - y + 3z - 8 = 0 \end{cases}$  que son centro de una esfera de radio 3, tangente al plano  $\pi \equiv 2x + 2y - z - 7 = 0$ .

-----

La expresión de  $r$  por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - y + z - 6 = 0 \\ x - y + 3z - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = 6 - \lambda \\ x - y = 8 - 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = 6 - \lambda \\ -x + y = -8 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = -2 + 2\lambda; \quad x = -1 + \lambda; \quad y = x - 8 + 3\lambda = -1 + \lambda - 8 + 3\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -9 + 4\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -9 + 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un punto genérico de la recta  $r$  es  $P(-1 + \lambda, -9 + 4\lambda, \lambda)$ .

Se tiene que cumplir que la distancia  $d(P, \pi) = 3$ .

La distancia del punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  al plano  $Ax + By + Cz + D = 0$  viene dada por la fórmula  $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ .

Aplicando la fórmula al punto  $P(-1 + \lambda, -9 + 4\lambda, \lambda)$  y plano  $\pi \equiv 2x + 2y - z - 7 = 0$ :

$$d(\pi, P) = 3 \Rightarrow \frac{|2 \cdot (-1 + \lambda) + 2 \cdot (-9 + 4\lambda) - \lambda - 7|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-2 + 2\lambda - 18 + 8\lambda - \lambda - 7|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{|-27 + 9\lambda|}{\sqrt{9}} =$$

$$= \frac{|-27 + 9\lambda|}{3} = 3; \quad |-27 + 9\lambda| = 9; \quad |-3 + \lambda| = 1 \Rightarrow \begin{cases} -3 + \lambda = 1 \rightarrow \lambda_1 = 4 \\ 3 - \lambda = 1 \rightarrow \lambda_2 = 2 \end{cases}.$$

$$\lambda_1 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 4 = 3 \\ y = -9 + 16 = 7 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow \underline{P_1(3, 7, 4)}.$$

$$\lambda_2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 2 = 1 \\ y = -9 + 8 = -1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \underline{P_2(1, -1, 2)}.$$

\*\*\*\*\*

5º) Sea la función  $f(x) = \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4} \cdot L \frac{1}{x} \right)$ .

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo  $\left[ \frac{1}{e}, e \right]$ .

b) Demuestra que existe un valor  $a \in \left( \frac{1}{e}, e \right)$  tal que  $f'(a) = \frac{e\sqrt{2}}{1-e^2}$ . Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

-----

a)

Las funciones  $\operatorname{sen} u$  y  $\cos u$  existen y son continuas para cualquier valor real de  $x$ . Siendo  $u = h(x)$ , demostrar lo pedido es equivalente a demostrar que es continua la función  $h(x) = \frac{\pi}{4} \cdot L \frac{1}{x}$ .

La función  $h(x) = \frac{\pi}{4} \cdot L \frac{1}{x}$  es continua en  $\left[ \frac{1}{e}, e \right]$  por ser  $x \in \left[ \frac{1}{e}, e \right] \Rightarrow x > 0$  y, en consecuencia  $\frac{1}{x} > 0$ , teniendo en cuenta que la función logaritmo neperiano está definida en  $(0, +\infty)$ .

Queda demostrado que  $f(x) = \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4} \cdot L \frac{1}{x} \right)$  es continua en  $\left[ \frac{1}{e}, e \right]$ .

b)

$$f(x) = \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4} \cdot L \frac{1}{x} \right) = \operatorname{sen} u \Rightarrow f'(x) = u' \cdot \cos u. \quad (*)$$

$$u = \frac{\pi}{4} \cdot L \frac{1}{x} = \frac{\pi}{4} \cdot (L1 - Lx) = \frac{\pi}{4} \cdot (0 - Lx) \Rightarrow u = -\frac{\pi}{4} \cdot Lx.$$

$$u' = -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{4x}. \quad \text{Sustituyendo en (*):}$$

$$f'(x) = -\frac{\pi}{4x} \cdot \cos \left( \frac{\pi}{4} \cdot L \frac{1}{x} \right).$$

La función  $f'(x)$  es continua en  $\left( \frac{1}{e}, e \right)$  por ser producto de dos funciones continuas en  $\left( \frac{1}{e}, e \right)$  y teniendo en cuenta el apartado anterior.

Teniendo en cuenta el teorema de los valores intermedios o desigualdad de Darboux, que dice que, “si una función es continua en un intervalo  $[a, b]$  toma todos los valores comprendidos entre  $f(a)$  y  $f(b)$  al menos una vez”.

$$f' \left( \frac{1}{e} \right) = -\frac{\pi \cdot e}{4} \cdot \cos \left( \frac{\pi}{4} \cdot L e \right) = -\frac{\pi \cdot e}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi \cdot e}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi \cdot e \sqrt{2}}{8} \cong -1,51.$$

$$f'(e) = -\frac{\pi}{4e} \cdot \cos \left( \frac{\pi}{4} \cdot L \frac{1}{e} \right) = -\frac{\pi}{4e} \cdot \left( -\cos \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4e} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi \sqrt{2}}{8e} \cong -0,20.$$

Demostrar lo pedido, según lo anterior, equivale a demostrar que:

$$f'\left(\frac{1}{e}\right) < \frac{e\sqrt{2}}{1-e^2} < f'\left(\frac{1}{e}\right) \Rightarrow -1,51 < \frac{e\sqrt{2}}{1-e^2} < -0,20.$$

Siendo  $\frac{e\sqrt{2}}{1-e^2} \cong -0,60$ , se cumple, en efecto, que:  $-1,51 < -0,60 < -0,20$ .

Queda probado que existe  $a \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$  tal que  $f'(a) = \frac{e\sqrt{2}}{1-e^2}$ .

\*\*\*\*\*

www.yoquieroaprobar.es

6º) Calcula los siguientes límites:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{x^2+x-1} \right)^{2x-1}$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x-1)^2}{L(x+1)-x}$ .

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{x^2+x-1} \right)^{2x-1} = 1^\infty \Rightarrow \text{Ind. tipo } n^\circ e \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+x-1-x+1}{x^2+x-1} \right)^{2x-1} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+x-1}{x^2+x-1} + \frac{-x+1}{x^2+x-1} \right)^{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{-x+1}{x^2+x-1} \right)^{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{x^2+x-1}{-x+1}} \right)^{2x-1} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{x^2+x-1}{-x+1}} \right)^{(2x-1) \cdot \frac{x^2+x-1}{-x+1} \cdot \frac{-x+1}{x^2+x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{\frac{x^2+x-1}{-x+1}} \right)^{\frac{x^2+x-1}{-x+1}} \right]^{(2x-1) \cdot \frac{-x+1}{x^2+x-1}} = \\
 & = \left[ \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{x^2+x-1}{-x+1}} \right)^{\frac{x^2+x-1}{-x+1}} \right]^{\frac{-2x^2+2x+x-1}{x^2+x-1}} = \left[ \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{x^2+x-1}{-x+1}} \right)^{\frac{x^2+x-1}{-x+1}} \right]^{\frac{-2x^2+3x-1}{x^2+x-1}} = \\
 & = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2+3x-1}{x^2+x-1}} = e^{-2} \Rightarrow \underline{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{x^2+x-1} \right)^{2x-1} = \frac{1}{e^2}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x-1)^2}{L(x+1)-x} = \frac{(e^0-1)^2}{L(0+1)-0} = \frac{(1-1)^2}{L1} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Ind.} \Rightarrow \{L'Hotipal\} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot (e^x-1) \cdot e^x}{\frac{1}{x+1}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x \cdot (e^x-1)}{\frac{1-x-1}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x \cdot (e^x-1)}{\frac{-x}{x+1}} = \frac{2 \cdot e^0 \cdot (e^0-1)}{\frac{-0}{0+1}} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 0}{\frac{0}{1}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \{L'Hotipal\} \Rightarrow -2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-e^x}{\frac{x}{x+1}} = -2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x}-e^x}{\frac{1 \cdot (x+1)-x \cdot 1}{(x+1)^2}} = -2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x}-e^x}{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}} = \\
 & = -2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x}-e^x}{\frac{1}{(x+1)^2}} = -2 \cdot \frac{2e^0-e^0}{\frac{1}{(0+1)^2}} = -2 \cdot \frac{2 \cdot 1-1}{1} \Rightarrow \underline{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x-1)^2}{L(x+1)-x} = -2}.
 \end{aligned}$$

\*\*\*\*\*

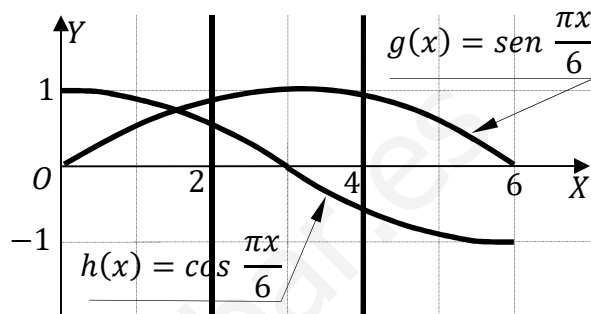
7º) Sea la función  $f(x) = L\left(\sin \frac{\pi x}{6} - \cos \frac{\pi x}{6}\right)$ .

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo  $[2, 4]$ .

b) Demuestra que existe un valor  $a \in (2, 4)$  tal que  $f(a) = 0$ . Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

a)

Considerando las funciones trigonométricas  $g(x) = \sin \frac{\pi x}{6}$  y  $h(x) = \cos \frac{\pi x}{6}$ , cuyas gráficas, de forma aproximada, se expresan en la figura adjunta en torno al intervalo  $(2, 4)$ , se observa que, en el mencionado intervalo, todas las ordenadas de la función  $g(x) = \sin \frac{\pi x}{6}$  son mayores que



las correspondientes ordenadas de la función  $h(x) = \cos \frac{\pi x}{6}$ , por lo cual se puede deducir que la función  $\gamma(x) = g(x) - h(x)$  es tal que  $\gamma(x) > 0, \forall x \in (2, 4)$ .

Para la representación gráfica se ha tenido en cuenta lo siguiente:

$$g(x) = \sin \frac{\pi x}{6} = 0 \Rightarrow \frac{\pi x}{6} = \pi; \frac{x}{6} = 1 \Rightarrow x = 6.$$

$$h(x) = \cos \frac{\pi x}{6} = 0 \Rightarrow \frac{\pi x}{6} = \frac{\pi}{2}; \frac{x}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 3.$$

La función  $\gamma(x)$  es continua en  $\mathbb{R}$ , por ser función diferencia de dos funciones continuas en  $\mathbb{R}$ .

Teniendo en cuenta que el dominio de la función logaritmo neperiano es  $(0, +\infty)$ , de todo lo anterior se deduce, y como se quería demostrar que:

La función  $f(x) = L\left(\sin \frac{\pi x}{6} - \cos \frac{\pi x}{6}\right)$  es continua en  $(2, 4)$ .

b)

A la función  $f(x) = L\left(\sin \frac{\pi x}{6} - \cos \frac{\pi x}{6}\right)$  le es aplicable el teorema de Bolzano, que dice que “si  $f(x)$  es una función continua en  $[a, b]$  y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces  $\exists c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ ”

$$f(2) = L\left(\sin \frac{2\pi}{6} - \cos \frac{2\pi}{6}\right) = L\left(\sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3}\right) = L\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = L\frac{\sqrt{3}-1}{2} < 0.$$

$$f(4) = L\left(\sin \frac{4\pi}{6} - \cos \frac{4\pi}{6}\right) = L\left(\sin \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{2\pi}{3}\right) = L\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = L\frac{\sqrt{3}+1}{2} > 0.$$

Queda demostrado que existe  $a \in (2,4)$  tal que  $f(a) = 0$ .

\*\*\*\*\*

[www.yoquieroaprobar.es](http://www.yoquieroaprobar.es)

8º) Calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de estas dos funciones:  $f(x) = x^3 - 3x - 2$  y  $g(x) = x - 2$ .

-----

Los puntos de corte de las dos funciones tienen como abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 - 3x - 2 = x - 2; \quad x^3 - 4x = 0; \quad x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2.$$

Considerando el valor  $x = -1 \in (-2, 0)$ :

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) - 2 = -1 + 3 - 2 = 0 \\ g(-1) = -1 - 2 = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow f(-1) > g(-1).$$

Considerando el valor  $x = 1 \in (0, 2)$ :

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 - 2 = 1 - 3 - 2 = -4 \\ g(1) = 1 - 2 = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow g(1) > f(1).$$

De lo anterior se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^0 [f(x) - g(x)] \cdot dx + \int_0^2 [g(x) - f(x)] \cdot dx = \\ &= \int_{-2}^0 [(x^3 - 3x - 2) - (x - 2)] \cdot dx + \int_0^2 [(x - 2) - (x^3 - 3x - 2)] \cdot dx = \\ &= \int_{-2}^0 (x^3 - 3x - 2 - x + 2) \cdot dx + \int_0^2 (x - 2 - x^3 + 3x + 2) \cdot dx = \\ &= \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) \cdot dx + \int_0^2 (4x - x^3) \cdot dx = \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2} \right]_{-2}^0 + \left[ \frac{4x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \\ &= \left[ \frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{-2}^0 + \left[ 2x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 0 - \left[ \frac{(-2)^4}{4} - 2 \cdot (-2)^2 \right] + \left( 2 \cdot 2^2 - \frac{2^4}{4} \right) - 0 = \\ &= -4 + 8 + 8 - 4 \Rightarrow \underline{S = 8 u^2}. \end{aligned}$$

\*\*\*\*\*