PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

EXTRAORDINARIA – 2022

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan.

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible.

$$\begin{cases} (a^2-1)x + ay + a^2z = 1 \\ (a^2-1)x + (a+1)y + (a^2+a)z = 2. \\ y + (a^2+2a)z = a+2 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} a^2-1 & a & a^2 \\ a^2-1 & a+1 & a^2+a \\ 0 & 1 & a^2+2a \end{pmatrix};\ M' = \begin{pmatrix} a^2-1 & a & a^2 & 1 \\ a^2-1 & a+1 & a^2+a & 2 \\ 0 & 1 & a^2+2a & a+2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} a^2-1 & a & a^2 \\ a^2-1 & a+1 & a^2+a \\ 0 & 1 & a^2+2a \end{vmatrix} \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a^2-1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & a^2+2a \end{vmatrix} = (a^2-1)\cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & a^2+2a \end{vmatrix} = (a^2-1)(a^2+2a-a) =$$

$$= (a^2-1)(a^2+a) = a(a+1)^2(a-1) \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = -1, a_3 = 1.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$Para \begin{Bmatrix} a \neq 0 \\ a \neq -1 \\ a \neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.$$

$$Para\ a = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 1 + 2 = -1 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ a = 0 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a = -1 \Rightarrow \begin{cases} M' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2 = -C_3\} \Rightarrow Rang\ M' = 2 \\ M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M = 1 \end{cases}.$$

$$\underline{Para\ a = -1 \Rightarrow Rang\ M = 1;\ Rang\ M' = 2 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_3 = C_4\} \Rightarrow Rang\ M' = 2$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a = -1 \\ a = 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Se resuelve, en primer lugar, para $a \neq 0, a \neq -1\ y\ a \neq 1$:

$$\begin{pmatrix} a^2 - 1 & a & a^2 & 1 \\ a^2 - 1 & a + 1 & a^2 + a & 2 \\ 0 & 1 & a^2 + 2a & a + 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 - 1 & a & a^2 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a^2 + 2a & a + 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 - 1 & a & a^2 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a^2 + a & a + 1 \end{pmatrix} \Rightarrow z = \frac{a+1}{a^2+a} = \frac{a+1}{a(a+1)} \Rightarrow z = \frac{1}{a}.$$

$$y + a \cdot \frac{1}{a} = 1;\ \ y + 1 = 1 \Rightarrow y = 0.\ \ (a^2 - 1)x + a^2 \cdot \frac{1}{a} = 1;\ (a^2 - 1)x = 1 - a;$$

$$(a + 1)(a - 1)x = -(a - 1);\ \ (a + 1)x = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{a+1}.$$

$$\underline{Solución: x = \frac{-1}{a+1}, y = 0, z = \frac{1}{a}, \forall a \in R - \{-1, 0, 1\}.}$$

Resolvemos ahora para $a = 1$. El sistema resulta $\left.\begin{array}{r} y + z = 1 \\ 2y + 2z = 2 \\ y + 3z = 3 \end{array}\right\}$, equivalente al sistema $\left.\begin{array}{r} y + z = 1 \\ y + 3z = 3 \end{array}\right\}$ que es compatible indeterminado. Haciendo $x = \lambda$:

$$\left.\begin{array}{r} y + z = 1 \\ y + 3z = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -y - z = -1 \\ y + 3z = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 2z = 2;\ \ z = 1;\ \ y = 0.$$

$$\underline{Solución: x = \lambda, y = 0, z = 1, \forall \lambda \in R.}$$

****

2º) Demuestra que se cumple $|A \cdot B| = 0$ para toda matriz A de dimensión 3×2, siendo $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & a+2b \\ c & d & c+2d \\ e & f & e+2f \end{pmatrix}.$$

$$|A \cdot B| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & a+2b \\ c & d & c+2d \\ e & f & e+2f \end{vmatrix} = 0;$$

$$ad(e+2f) + cf(a+2b) + be(c+2d) - de(a+2b) - af(c+2d) -$$

$$-bc(e+2f) = (a+2b)(cf-de) + (c+2d)(be-af) + (e+2f)(ad-bc) =$$

$$= acf - ade + 2bcf - 2bde + bce - acf + 2bde - 2adf + ade - bce +$$

$$+2adf - 2bcf = 0.$$

También puede hacerse de la forma siguiente:

$$\begin{vmatrix} a & b & a+2b \\ c & d & c+2d \\ e & f & e+2f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & a \\ c & d & c \\ e & f & e \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & 2b \\ c & d & 2d \\ e & f & 2f \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0.$$

En la realización del ejercicio se han utilizado las siguientes propiedades de los determinantes:

1ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en dicha línea el primero y el segundo sumandos, respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial.

2ª.- Si un determinante tiene dos líneas paralelas iguales o proporcionales su valor es cero.

$$\underline{|A \cdot B| = 0, \forall a, b, c, d, e, f, como\ se\ quería\ demostrar.}$$

****

3º) Calcula la ecuación general del plano π perpendicular al plano $\alpha \equiv 2x - y - z - 1 = 0$, sabiendo que contiene al punto $P(-1, 2, 1)$ y que la intersección de ambos planos es una recta paralela a $r \equiv \begin{cases} x + y - 2z - 3 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases}$.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 2z - 3 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda;\ \ y = 3 + \lambda;\ \ x = 3 + 2\lambda - 3 - \lambda = \lambda \Rightarrow$$

$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda. \\ z = \lambda \end{cases}$ Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (1, 1, 1)$.

También se puede obtener un vector director de r de la forma siguiente:

Un vector director de la recta r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\overrightarrow{n_1} = (1, 1, -2)$ y $\overrightarrow{n_2} = (0, 1, -1)$.

$$\overrightarrow{v_r'} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -i + k + 2i + j = i + j + k \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (1, 1, 1).$$

Un vector normal del plano $\alpha \equiv 2x - y - z - 1 = 0$ es $\vec{n} = (2, -1, -1)$.

La expresión general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi(P;\ \overrightarrow{v_r}, \vec{n}) \equiv \begin{vmatrix} x + 1 & y - 2 & z - 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-(x + 1) + 2(y - 2) - (z - 1) - 2(z - 1) + (x + 1) + (y - 2) = 0;$$

$$3(y - 2) - 3(z - 1) = 0;\ \ y - 2 - z + 1 \Rightarrow \underline{\pi \equiv y - z - 1 = 0}.$$

****

4º) Encuentra los puntos de la recta $r \equiv \begin{cases} 3x - y + z - 6 = 0 \\ x - y + 3z - 8 = 0 \end{cases}$ que son centro de una esfera de radio 3, tangente al plano $\pi \equiv 2x + 2y - z - 7 = 0$.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - y + z - 6 = 0 \\ x - y + 3z - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3x - y = 6 - \lambda \\ x - y = 8 - 3\lambda \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 3x - y = 6 - \lambda \\ -x + y = -8 + 3\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = -2 + 2\lambda; \;\; x = -1 + \lambda; \;\; y = x - 8 + 3\lambda = -1 + \lambda - 8 + 3\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -9 + 4\lambda \;\; \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -9 + 4\lambda. \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un punto genérico de la recta r es $P(-1 + \lambda, -9 + 4\lambda, \lambda)$.

Se tiene que cumplir que la distancia $d(P, \pi) = 3$.

La distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la fórmula al punto $P(-1 + \lambda, -9 + 4\lambda, \lambda)$ y plano $\pi \equiv 2x + 2y - z - 7 = 0$:

$$d(\pi, P) = 3 \Rightarrow \frac{|2 \cdot (-1 + \lambda) + 2 \cdot (-9 + 4\lambda) - \lambda - 7|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-2 + 2\lambda - 18 + 8\lambda - \lambda - 7|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{|-27 + 9\lambda|}{\sqrt{9}} =$$

$$= \frac{|-27 + 9\lambda|}{3} = 3; \;\; |-27 + 9\lambda| = 9; \;\; |-3 + \lambda| = 1 \Rightarrow \begin{cases} -3 + \lambda = 1 \rightarrow \lambda_1 = 4 \\ 3 - \lambda = 1 \rightarrow \lambda_2 = 2 \end{cases}.$$

$$\lambda_1 = 4 \Rightarrow \left.\begin{cases} x = -1 + 4 = 3 \\ y = -9 + 16 = 7 \\ z = 4 \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{P_1(3, 7, 4)}.$$

$$\lambda_2 = 2 \Rightarrow \left.\begin{cases} x = -1 + 2 = 1 \\ y = -9 + 8 = -1 \\ z = 2 \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{P_2(1, -1, 2)}.$$

****

5º) Sea la función $f(x) = sen\left(\frac{\pi}{4} \cdot L\frac{1}{x}\right)$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $\left[\frac{1}{e}, e\right]$.

b) Demuestra que existe un valor $a \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$ tal que $f'(a) = \frac{e\sqrt{2}}{1-e^2}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

---

a)

Las funciones $sen\, u$ y $\cos u$ existen y son continuas para cualquier valor real de x. Siendo $u = h(x)$, demostrar lo pedido es equivalente a demostrar que es continua la función $h(x) = \frac{\pi}{4} \cdot L\frac{1}{x}$.

La función $h(x) = \frac{\pi}{4} \cdot L\frac{1}{x}$ es continua en $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ por ser $x \in \left[\frac{1}{e}, e\right] \Rightarrow x > 0$ y, en consecuencia $\frac{1}{x} > 0$, teniendo en cuanta que la función logaritmo neperiano está definida en $(0, +\infty)$.

$$\underline{Queda\ demostrado\ que\ f(x) = sen\left(\frac{\pi}{4} \cdot L\frac{1}{x}\right)\ es\ continua\ en\ \left[\frac{1}{e}, e\right].}$$

b)

$$f(x) = sen\left(\frac{\pi}{4} \cdot L\frac{1}{x}\right) = sen\, u \Rightarrow f'(x) = u' \cdot \cos u. \quad (*)$$

$$u = \frac{\pi}{4} \cdot L\frac{1}{x} = \frac{\pi}{4} \cdot (L1 - Lx) = \frac{\pi}{4} \cdot (0 - Lx) \Rightarrow u = -\frac{\pi}{4} \cdot Lx.$$

$u' = -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{4x}$. Sustituyendo en (*):

$$f'(x) = -\frac{\pi}{4x} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot L\frac{1}{x}\right).$$

La función $f'(x)$ es continua en $\left(\frac{1}{e}, e\right)$ por ser producto de dos funciones continuas en $\left(\frac{1}{e}, e\right)$ y teniendo en cuenta el aparado anterior.

Teniendo en cuanta el teorema de los valores intermedios o desigualdad de Darboux, que dice que, "si una función es continua en un intervalo $[a, b]$ toma todos los valores comprendidos entre $f(a)\ y\ f(b)$ al menos una vez".

$$f'\left(\tfrac{1}{e}\right) = -\frac{\pi \cdot e}{4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot Le\right) = -\frac{\pi \cdot e}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi \cdot e}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi \cdot e\sqrt{2}}{8} \cong -1{,}51.$$

$$f'(e) = -\frac{\pi}{4e} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot L\frac{1}{e}\right) = -\frac{\pi}{4e} \cdot \left(-\cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4e} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{8e} \cong -0{,}20.$$

Demostrar lo pedido, según lo anterior, equivale a demostrar que:

$f'\left(\frac{1}{e}\right) < \frac{e\sqrt{2}}{1-e^2} < f'\left(\frac{1}{e}\right) \Rightarrow -1{,}51 < \frac{e\sqrt{2}}{1-e^2} < -0{,}20.$

Siendo $\frac{e\sqrt{2}}{1-e^2} \cong -0{,}60$, se cumple, en efecto, que: $-1{,}51 < -0{,}60 < -0{,}20$.

$$\underline{Queda\ probado\ que\ existe\ a \in \left(\frac{1}{e}, e\right)\ tal\ que\ f'(a) = \frac{e\sqrt{2}}{1-e^2}.}$$

****

6º) Calcula los siguientes límites: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+x-1}\right)^{2x-1}$ y $\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^2}{L(x+1)-x}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+x-1}\right)^{2x-1}=1^{\infty}\Rightarrow Ind.\ tipo\ n^{\underline{o}}\ e\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-1-x+1}{x^2+x-1}\right)^{2x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{x^2+x-1}+\frac{-x+1}{x^2+x-1}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-x+1}{x^2+x-1}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+x-1}{-x+1}}\right)^{2x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+x-1}{-x+1}}\right)^{(2x-1)\cdot\frac{x^2+x-1}{-x+1}\cdot\frac{-x+1}{x^2+x-1}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+x-1}{-x+1}}\right)^{\frac{x^2+x-1}{-x+1}}\right]^{(2x-1)\cdot\frac{-x+1}{x^2+x-1}}=$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+x-1}{-x+1}}\right)^{\frac{x^2+x-1}{-x+1}}\right]^{\frac{-2x^2+2x+x-1}{x^2+x-1}}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+x-1}{-x+1}}\right)^{\frac{x^2+x-1}{-x+1}}\right]^{\frac{-2x^2+3x-1}{x^2+x-1}}=$$

$$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2+3x-1}{x^2+x-1}}=e^{-2}\Rightarrow\underline{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+x-1}\right)^{2x-1}=\frac{1}{e^2}}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^2}{L(x+1)-x}=\frac{(e^0-1)^2}{L(0+1)-0}=\frac{(1-1)^2}{L1}=\frac{0}{0}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hotipal\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot(e^x-1)\cdot e^x}{\frac{1}{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^x\cdot(e^x-1)}{\frac{1-x-1}{x+1}}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^x\cdot(e^x-1)}{\frac{-x}{x+1}}=\frac{2\cdot e^0\cdot(e^0-1)}{\frac{-0}{0+1}}=\frac{2\cdot 1\cdot 0}{\frac{0}{1}}=\frac{0}{0}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{L'Hotipal\}\Rightarrow-2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^x}{\frac{x}{x+1}}=-2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-e^x}{\frac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2}}=-2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-e^x}{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}=$$

$$=-2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-e^x}{\frac{1}{(x+1)^2}}=-2\cdot\frac{2e^0-e^0}{\frac{1}{(0+1)^2}}=-2\cdot\frac{2\cdot 1-1}{1}\Rightarrow\underline{\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^2}{L(x+1)-x}=-2}.$$

****

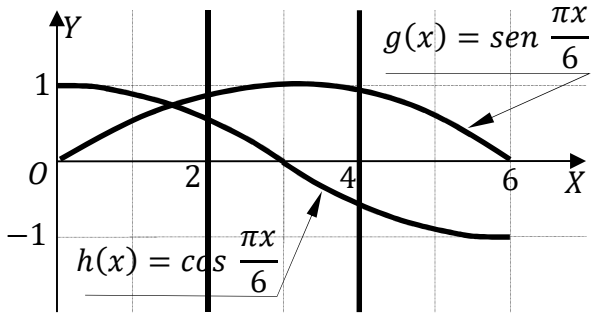
7º) Sea la función $f(x) = L\left(sen\ \frac{\pi x}{6} - \cos\frac{\pi x}{6}\right)$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[2, 4]$.

b) Demuestra que existe un valor $a \in (2, 4)$ tal que $f(a) = 0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

---

a)



Considerando las funciones trigonométricas $g(x) = sen\ \frac{\pi x}{6}$ y $h(x) = cos\ \frac{\pi x}{6}$, cuyas gráficas, de forma aproximada, se expresan en la figura adjunta en torno al intervalo $(2, 4)$, se observa que, en el mencionado intervalo, todas las ordenadas de la función $g(x) = sen\ \frac{\pi x}{6}$ son mayores que las correspondientes ordenadas de la función $h(x) = cos\ \frac{\pi x}{6}$, por lo cual se puede deducir que la función $\gamma(x) = g(x) - h(x)$ es tal que $\gamma(x) > 0, \forall x \in (2, 4)$.

Para la representación gráfica se ha tenido en cuenta lo siguiente:

$$g(x) = sen\ \frac{\pi x}{6} = 0 \Rightarrow \frac{\pi x}{6} = \pi;\ \frac{x}{6} = 1 \Rightarrow x = 6.$$

$$h(x) = cos\ \frac{\pi x}{6} = 0 \Rightarrow \frac{\pi x}{6} = \frac{\pi}{2};\ \frac{x}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 3.$$

La función $\gamma(x)$ es continua en R, por ser función diferencia de dos funciones continuas en R.

Teniendo en cuenta que el dominio de la función logaritmo neperiano es $(0, +\infty)$, de todo lo anterior se deduce, y como se quería demostrar que:

$$\underline{La\ función\ f(x) = L\left(sen\ \frac{\pi x}{6} - \cos\frac{\pi x}{6}\right)\ es\ continua\ en\ (2, 4).}$$

b)

A la función $f(x) = L\left(sen\ \frac{\pi x}{6} - \cos\frac{\pi x}{6}\right)$ le es aplicable el teorema de Bolzano, que dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$"

$$f(2) = L\left(sen\ \frac{2\pi}{6} - \cos\frac{2\pi}{6}\right) = L\left(sen\ \frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3}\right) = L\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = L\frac{\sqrt{3}-1}{2} < 0.$$

$$f(4) = L\left(sen\ \frac{4\pi}{6} - \cos\frac{4\pi}{6}\right) = L\left(sen\ \frac{2\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3}\right) = L\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = L\frac{\sqrt{3}+1}{2} > 0.$$

$\underline{Queda\ demostrado\ que\ existe\ a \in (2,4)\ tal\ que\ f(a) = 0.}$

****

8º) Calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de estas dos funciones: $f(x) = x^3 - 3x - 2$ y $g(x) = x - 2$.

Los puntos de corte de las dos funciones tienen como abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 - 3x - 2 = x - 2;\ \ x^3 - 4x = 0;\ \ x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2.$$

Considerando el valor $x = -1 \in (-2, 0)$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) - 2 = -1 + 3 - 2 = 0 \\ g(-1) = -1 - 2 = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-1) > g(-1).$$

Considerando el valor $x = 1 \in (2, 0)$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 - 2 = 1 - 3 - 2 = -4 \\ g(1) = 1 - 2 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow g(-1) > f(-1).$$

De lo anterior se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)] \cdot dx + \int_{0}^{2} [g(x) - f(x)] \cdot dx =$$

$$= \int_{-2}^{0} [(x^3 - 3x - 2) - (x - 2)] \cdot dx + \int_{0}^{2} [(x - 2) - (x^3 - 3x - 2)] \cdot dx =$$

$$= \int_{-2}^{0} (x^3 - 3x - 2 - x + 2) \cdot dx + \int_{0}^{2} (x - 2 - x^3 + 3x + 2) \cdot dx =$$

$$= \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x) \cdot dx + \int_{0}^{2} (4x - x^3) \cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{2} =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0} + \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{2} = 0 - \left[\frac{(-2)^4}{4} - 2 \cdot (-2)^2\right] + \left(2 \cdot 2^2 - \frac{2^4}{4}\right) - 0 =$$

$$= -4 + 8 + 8 - 4 \Rightarrow \underline{S = 8\,u^2}.$$

****