

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)**UNIVERSIDAD DE NAVARRA****JUNIO – 2022**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan.

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible.

$$\begin{cases} x + (a^2 - 2a)y - z = -a^2 \\ x + (a^2 - 4)y + (2a - 3)z = -a^2 - 2a \\ x + (a^2 - 4a + 4)y + (a^2 - 2a)z = -a^2 + a - 1 \end{cases}.$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a^2 - 2a & -1 \\ 1 & a^2 - 4 & 2a - 3 \\ 1 & a^2 - 4a + 4 & a^2 - 2a \end{pmatrix} y$$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & a^2 - 2a & -1 & -a^2 \\ 1 & a^2 - 4 & 2a - 3 & -a^2 - 2a \\ 1 & a^2 - 4a + 4 & a^2 - 2a & -a^2 + a - 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$\begin{aligned} |M| &= \begin{vmatrix} 1 & a^2 - 2a & -1 \\ 1 & a^2 - 4 & 2a - 3 \\ 1 & a^2 - 4a + 4 & a^2 - 2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a(a - 2) & -1 \\ 1 & (a + 2)(a - 2) & 2a - 3 \\ 1 & (a - 2)^2 & a^2 - 2a \end{vmatrix} = \\ &= (a - 2) \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & a + 2 & 2a - 3 \\ 1 & a - 2 & a^2 - 2a \end{vmatrix} = \\ &= (a - 2) \cdot [a(a + 2)(a - 2) - a + 2 + a(2a - 3) + a + 2 - a^2(a - 2) - \\ & - (a - 2)(2a - 3)] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (a - 2) \cdot [a(a^2 - 4) + 4 + 2a^2 - 3a - a^3 + 2a^2 - 2a^2 + 3a + 4a - 6] = \\
&= (a - 2) \cdot [a^3 - 4a - a^3 + 2a^2 + 4a - 2] = (a - 2)(2a^2 - 2) = \\
&= 2(a - 2)(a^2 - 1) = 0 \Rightarrow a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = 2.
\end{aligned}$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\text{Para } \begin{cases} a \neq -1 \\ a \neq 1 \\ a \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.D.}$$

$$\text{Para } a = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2 = -3C_4\} \Rightarrow \text{Rang } M' = 2.$$

$$\text{Para } a = -1 \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.I.}$$

$$\text{Para } a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 1 + 3 - 3 + 3 - 1 = 4 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } M' = 3.$$

$$\text{Para } a = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & -8 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 8 + 4 - 3 = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } M' = 3.$$

$$\text{Para } \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } M = 2; \text{Rang } M' = 3 \Rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

Se resuelve, en primer lugar, para $a \neq -1, a \neq 1$ y $a \neq 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & a^2 - 2a & -1 & -a^2 \\ 1 & a^2 - 4 & 2a - 3 & -a^2 - 2a \\ 1 & a^2 - 4a + 4 & a^2 - 2a & -a^2 + a - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a^2 - 2a & -1 & -a^2 \\ 0 & 2a - 4 & 2a - 2 & -2a \\ 0 & -2a + 4 & a^2 - 2a + 1 & a - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 + F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a^2 - 2a & -1 & -a^2 \\ 0 & 2a - 4 & 2a - 2 & -2a \\ 0 & 0 & a^2 - 1 & -a - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow z = \frac{-a-1}{a^2-1} = \frac{-(a+1)}{(a+1)(a-1)} \Rightarrow z = \frac{-1}{a-1}.$$

$$2(a-2)y + 2(a-1)z = -2a; (a-2)y + (a-1) \cdot \frac{-1}{a-1} = -a;$$

$$(a-2)y - 1 = -a; (a-2)y = 1 - a \Rightarrow y = \frac{1-a}{a-2}.$$

$$x + a(a-2)y - z = -a^2; x + a(a-2) \cdot \frac{1-a}{a-2} - \frac{-1}{a-1} = -a^2;$$

$$x + a - a^2 + \frac{1}{a-1} = -a^2; x + a + \frac{1}{a-1} = 0; x = -\frac{1}{a-1} - a \Rightarrow x = \frac{-a^2+a-1}{a-1}.$$

$$\underline{\text{Solución: } x = \frac{-a^2+a-1}{a-1}, y = \frac{1-a}{a-2}, z = \frac{-1}{a-1}, \forall a \in \mathbb{R} - \{-1, 1, 2\}.}$$

Resolvemos ahora para $a = -1$. El sistema resulta $\left. \begin{array}{l} x + 3y - z = -1 \\ x - 3y - 5z = 1 \\ x + 9y + 3z = -3 \end{array} \right\}$, que es compatible indeterminado. Despreciando una ecuación, por ejemplo, la tercera, y haciendo $z = \lambda$:

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y = -1 + \lambda \\ x - 3y = 1 + 5\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = 6\lambda; x = 3\lambda. \quad 3y = -1 + \lambda - 3\lambda; y = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\lambda.$$

$$\underline{\text{Solución: } x = 3\lambda, y = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\lambda, z = \lambda, \forall \lambda \in \mathbb{R}.}$$

2º) Calcula los valores de t para los que la matriz $A^{26} + A^{25}$ es matriz singular, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t-1 \end{pmatrix}$.

Una matriz es singular cuando no es invertible, es decir: cuando su determinante es cero, por lo cual, tiene que ser $|A^{26} + A^{25}| = 0$.

$$A^{26} + A^{25} = A^{25} \cdot A + A^{25} \cdot I = A^{25} \cdot (A + I).$$

Teniendo en cuenta que el determinante de un producto de matrices es igual que el producto de los determinantes de las matrices, puede hacerse lo siguiente:

$$|A^{26} + A^{25}| = |A^{25} \cdot (A + I)| = |A^{25}| \cdot |(A + I)| = 0. \quad (*)$$

Teniendo en cuenta que $|A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t-1 \end{vmatrix} = 1$, sustituyendo en la expresión (*) resulta:

$$(|A|)^{25} \cdot |(A + I)| = 0; \quad 1^{25} \cdot |(A + I)| = 0 \Rightarrow |(A + I)| = 0.$$

$$A + I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}.$$

$$|(A + I)| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = 0; \quad t + 1 = 0 \Rightarrow t = -1.$$

La matriz $[A^{26} + A^{25}]$ es singular para $t = -1$.

3º) Calcula la ecuación continua de la recta t que pasa por el punto $T(1, -5, 3)$ y corta a las rectas $r \equiv \begin{cases} -x - y - z + 3 = 0 \\ 3x + z - 10 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$.

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} -x - y - z + 3 = 0 \\ 3x + z - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \lambda; z = 10 - 3\lambda; y = 3 - x - z = \\ = 3 - \lambda - 10 + 3\lambda; y = -7 + 2\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -7 + 2\lambda \\ z = 10 - 3\lambda \end{cases}$$

Un punto y un vector director de la recta r son $A(0, -7, 10)$ y $\vec{v}_r = (1, 2, -3)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(0, -1, 2)$ y $\vec{v}_s = (2, 1, -1)$.

$$\vec{AT} = \vec{OT} - \vec{OA} = [(1, -5, 3) - (0, -7, 10)] = (1, 2, -7).$$

$$\vec{BT} = \vec{OT} - \vec{OB} = [(1, -5, 3) - (0, -1, 2)] = (1, -4, 1).$$

Se definen los planos π_1 y π_2 de la siguiente forma:

$$\pi_1(T; \vec{v}_r, \vec{AT}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z-3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -7 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-14(x-1) - 3(y+5) + 2(z-3) - 2(z-3) + 6(x-1) + 7(y+5) = 0;$$

$$-8(x-1) + 4(y+5) = 0; 2(x-1) - (y+5) = 0; 2x - 2 - y - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_1 \equiv 2x - y - 7 = 0.$$

$$\pi_2(T; \vec{v}_s, \vec{BT}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z-3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x-1) - (y+5) - 8(z-3) - (z-3) - 4(x-1) - 2(y+5) = 0;$$

$$-3(x-1) - 3(y+5) - 9(z-3) = 0; (x-1) + (y+5) + 3(z-3) = 0;$$

$$x - 1 + y + 5 + 3z - 9 = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv x + y + 3z - 5 = 0.$$

La recta pedida es la que determinan los planos π_1 y π_2 :

$$t \equiv \begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ x + y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$$

La recta t expresada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$t \equiv \begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ x + y + 3z - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + y = 5 - 3\lambda \end{cases} \Rightarrow 3x = 12 - 3\lambda;$$

$$x = 4 - \lambda; \quad y = 2x - 7 = 8 - 2\lambda - 7 \Rightarrow y = 1 - 2\lambda.$$

$$t \equiv \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

www.yoquieroaprobar.es

4º) Calcula la ecuación continua de la recta s que pasa por el punto $P(1, 2, -1)$, es paralela al plano $\pi \equiv 2x - y + z = 0$ y corta a la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + 2z + 2 = 0 \\ 3x - y - z - 3 = 0 \end{cases}$

El haz de planos β paralelos a $\pi \equiv 2x - y + z = 0$ tiene por expresión general $\beta \equiv 2x - y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β , el plano γ que contiene al punto $P(1, 2, -1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\beta \equiv 2x - y + z + D = 0 \Bigg\} \Rightarrow 2 \cdot 1 - 2 - 1 + D = 0; -1 + D = 0 \Rightarrow D = 1 \Rightarrow$$

$$P(1, 2, -1)$$

$$\Rightarrow \gamma \equiv 2x - y + z + 1 = 0.$$

El punto Q de corte de la recta r con el plano γ es la solución del sistema que forman: $\begin{cases} x - y + 2z = -2 \\ 3x - y - z = 3 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases}$. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2-6-1-2+2+3}{-1-6+2+4-1+3} = \frac{-2}{1} = -2.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{1} = 3 - 6 + 4 - 12 - 1 + 6 = -6.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{1} = 1 + 6 - 6 - 4 + 3 - 3 = -3.$$

El punto de corte es $Q(-2, -6, -3)$.

La recta s pedida es la que contiene a los puntos $P(1, 2, -1)$ y $Q(-2, -6, -3)$.

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = [(1, 2, -1) - (-2, -6, -3)] = (3, 8, 2).$$

$$s \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{8} = \frac{z+1}{2}.$$

5º) Calcula las siguientes integrales definidas:

$$I_1 = \int \frac{dx}{2x\sqrt{x-1}} \quad e \quad I_2 = \int (3 - 2x) \cdot e^{-2x} \cdot dx.$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{2x\sqrt{x-1}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x-1} = t \rightarrow x-1 = t^2 \\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot dx = dt \\ x = t^2 + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \int \frac{1}{t^2+1} \cdot dt = \text{arc tg } t + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1 = \int \frac{dx}{2x\sqrt{x-1}} = \text{arc tg } \sqrt{x-1} + C.$$

$$I_2 = \int (3 - 2x) \cdot e^{-2x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 - 2x = u \rightarrow du = -2 \cdot dx \\ dv = e^{-2x} \cdot dx \rightarrow v = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3 - 2x) \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot e^{-2x}\right) - \int -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \cdot (-2 \cdot dx) =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \cdot (3 - 2x) - \int e^{-2x} \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \cdot (3 - 2x) + \frac{1}{2} \cdot e^{-2x} + C =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \cdot [(3 - 2x) - 1] + C = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \cdot (2 - 2x) + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_2 = \int (3 - 2x) \cdot e^{-2x} \cdot dx = e^{-2x} \cdot (x - 1) + C.$$

6º) Se considera la función $f(x) = e^{\frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}}$:

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[0, \pi]$.

b) Halla su extremo relativo en ese mismo intervalo.

a)

La función $f(x)$ es continua en \mathbb{R} , excepto los valores reales de x que anulan la expresión $\operatorname{sen} x + \cos x$, en cuyo caso, la función no está definida por ser:

$$f(x) = e^{\frac{1}{0}} = e^{\infty} = \infty.$$

$\operatorname{sen} x + \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\cos x \Rightarrow x = \left\{ \frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}; \frac{15\pi}{4} \dots \right\}$, en general: $x = \frac{4k-1}{4}\pi, \forall k \in \mathbb{N}$.

$$\text{Para } k = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{3\pi}{4} \in [0, \pi]. \quad \text{Para } k = 2 \Rightarrow x_2 = \frac{7\pi}{4} \notin [0, \pi].$$

La función está definida en $[0, \pi], \forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{3\pi}{4} \right\}$.

Por ser $f(x)$ una función compuesta por funciones continuas de x , $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$:

$$\underline{f(x) \text{ es continua en } [0, \pi], \text{ excepto para } x = \frac{3\pi}{4}.$$

b)

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo, máximo o mínimo, es que se anule su primera derivada en ese punto.

Para obtener la derivada de la función se procede del modo siguiente:

$$f(x) = e^{\frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}} \Rightarrow L[f(x)] = \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}.$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-1 \cdot (\cos x - \operatorname{sen} x)}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2} \Rightarrow f'(x) = e^{\frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}} \cdot \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}} \cdot \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2} = 0.$$

Por ser $e^{\frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ y $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 \neq 0, \forall x \in D(f)$:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x - \cos x = 0; \operatorname{sen} x = \cos x \Rightarrow x = \lambda\pi + \frac{\pi}{4}, \forall \lambda \in \mathbb{Z}.$$

Para $\lambda = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} \in [0, \pi]$. Para $\lambda = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{5\pi}{4} \notin [0, \pi]$.

El único extremo relativo se encuentra para $x = \frac{\pi}{4}$.

Para diferenciar si se trata de un máximo o de un mínimo relativo puede recurrirse a la segunda derivada, pero lo engorroso del proceso recomienda su determinación por el signo de la primera derivada en diferentes intervalos.

Para el estudio en el intervalo $(0, \frac{\pi}{4})$ se considera el valor $\frac{\pi}{6} \in (0, \frac{\pi}{4})$.

$$\text{Para } x = \frac{\pi}{6} = 30^\circ \Rightarrow f'(\frac{\pi}{6}) = e^{\frac{1}{\text{sen}\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}}} \cdot \frac{\text{sen}\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{6}}{(\text{sen}\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6})^2} = e^{\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}} \cdot \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})^2} =$$

$$= e^{\frac{1}{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}} \cdot \frac{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}{(\frac{1+\sqrt{3}}{2})^2} = (+) \cdot \frac{(-)}{(+)} < 0 \Rightarrow \text{En el intervalo } (0, \frac{\pi}{4}) \text{ la función es decreciente, lo}$$

cual implica, teniendo en cuenta la continuidad de la función, que para $x = \frac{\pi}{4}$ la función tiene un mínimo relativo.

$$f(\frac{\pi}{4}) = e^{\frac{1}{\text{sen}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}}} = e^{\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}} = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

La función $f(x)$ tiene un mínimo relativo en el punto $P(\frac{\pi}{4}, e^{\frac{1}{\sqrt{2}}})$.

7º) Sea la función $f(x) = \frac{e^{x^2-2}}{x}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-2, -1]$.

b) Comprueba que existe un valor $a \in (-2, -1)$ tal que $f'(a) = e$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

a)

La función $f(x) = \frac{e^{x^2-2}}{x}$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$, por ser el cociente de dos funciones continuas, en \mathbb{R} el numerador y en $\mathbb{R} - \{0\}$ el denominador y, teniendo en cuenta que $0 \notin [-2, -1]$:

La función $f(x)$ es continua en $[-2, -1]$.

b)

$$f'(x) = \frac{2x \cdot e^{x^2-2} \cdot x - e^{x^2-2} \cdot 1}{x^2} = \frac{e^{x^2-2} \cdot (2x^2 - 1)}{x^2}.$$

La función $f'(x)$ es continua en $(-2, -1)$ por ser un cociente tal que el numerador es el producto de dos funciones continuas en \mathbb{R} y el denominador es una función continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ y, teniendo en cuenta que $0 \notin (-2, -1)$, por lo cual, la función

$$f'(x) = \frac{e^{x^2-2} \cdot (2x^2 - 1)}{x^2} \text{ es continua en } (-2, -1).$$

Teniendo en cuenta el teorema de los valores intermedios o desigualdad de Darboux, que dice que, "si una función es continua en un intervalo $[a, b]$ toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$ al menos una vez".

$$f'(-2) = \frac{e^{(-2)^2-2} \cdot [2 \cdot (-2)^2 - 1]}{(-2)^2} = \frac{e^2 \cdot 7}{4} \cong 12,93.$$

$$f'(-1) = \frac{e^{(-1)^2-2} \cdot [2 \cdot (-1)^2 - 1]}{(-1)^2} = \frac{e^{-1} \cdot 1}{1} = \frac{1}{e} \cong 0,37.$$

De lo anterior se deduce que:

$f'(-1) \cong 0,37 < f'(a) = e \cong 2,72 < f'(-2) \cong 12,93$, con lo cual:

Queda probado que existe $a \in (-2, -1)$ tal que $f'(a) = e$.

8º) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas dos funciones: $f(x) = 2 - |x|$ y $g(x) = x^2 - 10$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

En primer lugar, nótese que ambas funciones son simétricas con respecto al eje de ordenadas por ser $f(-x) = f(x)$ y $g(-x) = g(x)$.

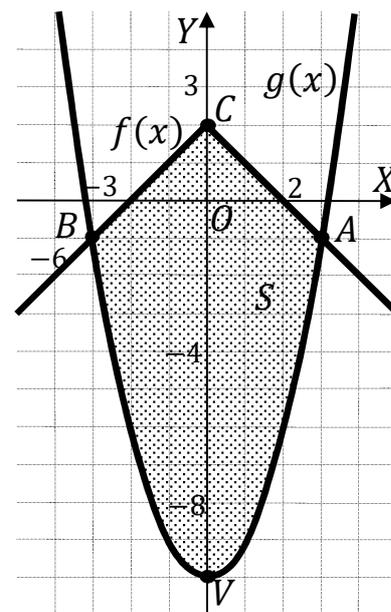
Teniendo en cuenta que $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$, la función $f(x) = 2 - |x|$ puede redefinirse de la forma siguiente: $f(x) = \begin{cases} 2 + x & \text{si } x \leq 0 \\ 2 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Los puntos de corte de las funciones tienen por abscisas las raíces de las ecuaciones que resultan de la igualación de sus expresiones.

$$\begin{aligned} \text{Para } x > 0: f(x) = g(x) &\Rightarrow 2 - x = x^2 - 10; \quad x^2 + x - 12 = 0; \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -4, \text{ no es } > 0 \\ x_2 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 3 \Rightarrow A(3, -1). \end{aligned}$$

Por simetría, otro punto de corte es $B(-3, -1)$.

Teniendo en cuenta que $f(0) = 2 \Rightarrow C(0, 2)$ y que la función $g(x) = x^2 - 10$ es una parábola convexa (U), por ser positivo el coeficiente de x^2 , cuyo vértice es el punto $V(0, -10)$, la representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la gráfica adjunta.



Teniendo en cuenta la simetría de las funciones, que en el intervalo de la superficie a calcular las ordenadas de la función $f(x)$ son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la función $g(x)$, y de la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot \int_0^3 [f(x) - g(x)] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^3 [(2 - x) - (x^2 - 10)] \cdot dx = \\ &= 2 \cdot \int_0^3 (-x^2 - x + 12) \cdot dx = 2 \cdot \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 12x \right]_0^3 = \\ &= 2 \cdot \left[\left(-\frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} + 12 \cdot 3 \right) - 0 \right] = 2 \cdot \left(-9 - \frac{9}{2} + 36 \right) = 2 \cdot \left(27 - \frac{9}{2} \right) = 54 - 9 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \underline{S = 45 u^2}. \end{aligned}$$
