PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá elegir una opción A o B y responder a todas las cuestiones de esa opción. Nunca podrá mezclar cuestiones de la opción A con cuestiones de la opción B. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

OPCIÓN A

1º) En una empresa trabajan empleados de las categorías A, B y C. El salario mensual de cada trabajador es de 1.200, 1.700 y 2.200 euros, según que pertenezcan a la categoría A, B y C, respectivamente. Todos los trabajadores destinan el 5 % de su salario a un plan de pensiones, lo que asciende en un mes a un total de 4.930 euros. El número de trabajadores de la categoría A es el 150 % de los de la categoría B. El número de trabajadores de la categoría B más el de la C supera en 3 al número de trabajadores de la categoría A. Hallar el número de trabajadores de cada categoría que tiene la empresa.

Sean x, y, z los trabajadores de las categorías A, B y C, respectivamente.

El total de la suma de los salarios se obtiene del modo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} 5\ \% ----4.930 \\ 100\ \% ---- \ x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 4.930}{5} = 20 \cdot 4.930 = 98.600.$$

$$\left.\begin{array}{r} 1.200x + 1.700y + 2.200z = 98.600 \\ x = 1{,}5y \\ y + z = x + 3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 12x + 17y + 22z = 986 \\ 2x - 3y = 0 \\ x - y - z = -3 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 986 & 17 & 22 \\ 0 & -3 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12 & 17 & 22 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{2.958-198}{36-44+66+34} = \frac{2.760}{92} = 30.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}12 & 986 & 22\\ 2 & 0 & 0\\ 1 & -3 & -1\end{vmatrix}}{92}=\frac{-132+1.972}{92}=\frac{1.840}{92}=20.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}12 & 17 & 986\\ 2 & -3 & 0\\ 1 & -1 & -3\end{vmatrix}}{92}=\frac{108-1.972+2.958+102}{92}=\frac{1.196}{92}=13.$$

$$\underline{Los\ empleados\ de\ los\ grupos\ A, B\ y\ C\ son\ 30, 20\ y\ 13, respectivamente.}$$

****

2º) Dada la función $f(x) = \frac{ax^2-2b}{x^2+1}$ donde $a, b \in R$:

a) Hallar el dominio de $f(x)$.

b) Hallar a y b para que la función tenga una asíntota horizontal en $y = 2$ y pase por el punto $P(0, 4)$.

c) Para $a = 1$ y $b = 1$, hallar $f'(x)$.

----

a)

Por ser $\underline{x^2 + 1 \neq 0, \forall a, b \in R \;\; \Rightarrow \;\; \underline{D(f) \Rightarrow R}}.$

b)

Una asíntota horizontal es el valor que toma la función cuando x tiende a más o menos infinito:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax^2-2b}{x^2+1} = \underline{a = 2}.$$

La función resulta: $f(x) = \frac{2x^2-2b}{x^2+1}$

Por pasar por $P(0, 4)$ es $f(0) = 4 \;\Rightarrow\; \frac{2\cdot 0-2b}{0+1} = 4;\; -2b = 4 \;\;\Rightarrow\;\; \underline{b = -2}.$

c)

Para $a = 1$ y $b = 1$ la función resulta: $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+1}$.

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x^2+1)-(x^2-2)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x\cdot[(x^2+1)-(x^2-2)]}{(x^2+1)^2} = \frac{2x\cdot(x^2+1-x^2+2)}{(x^2+1)^2} = \frac{6x}{(x^2+1)^2}.$$

$$\underline{f'(x) = \frac{6x}{(x^2+1)^2}}.$$

****

3º) Se considera la función definida por: $f(x)=\begin{cases} x+3 & si\ \ x<0 \\ -x^2+2x+3 & si\ \ x\geq 0 \end{cases}$.

$a)$ Representar gráficamente la función f.

$b)$ Calcular el área del recinto acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX.

$a)$

Teniendo en cuenta que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 3$, la función es continua en su dominio, que es R.

En el intervalo $(-\infty, 0)$ la función es una recta, siendo dos puntos de la misma, por ejemplo, $A(-3,0)\ y\ B(0,3)$.

En el intervalo $(0,+\infty)$ la función es la parábola $g(x)=-x^2+2x+3$, que es cóncava $(\cap)$, y cuyo vértice es el siguiente:

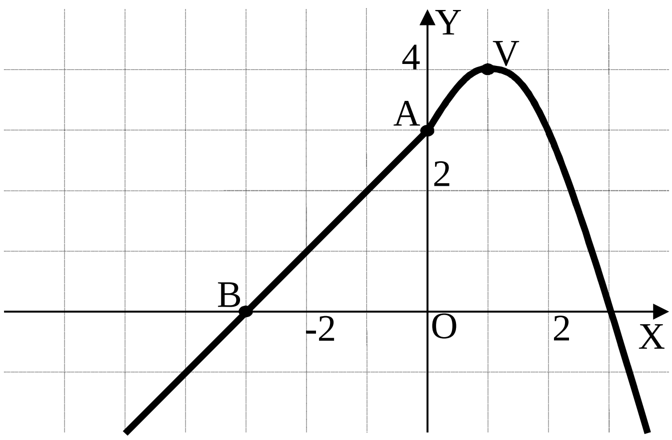
$g'(x)=-2x+2. \qquad g'(x)=0 \Rightarrow -2x+2=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow V(1,4).$

La parábola corta al eje Y en el punto $B(0,3)$ y al eje X en:

$g(x)=0 \Rightarrow -x^2+2x+3=0;\ \ x^2-2x-3=0;\ \ x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=$

$=\frac{2\pm 4}{2}=1\pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \Rightarrow \notin (0,+\infty) \\ x_2=3 \to C(3,0) \end{cases}.$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



$f(x)=\begin{cases} x+3 & si\ \ x<0 \\ -x^2+2x+3 & si\ \ x\geq 0 \end{cases}$

$b)$

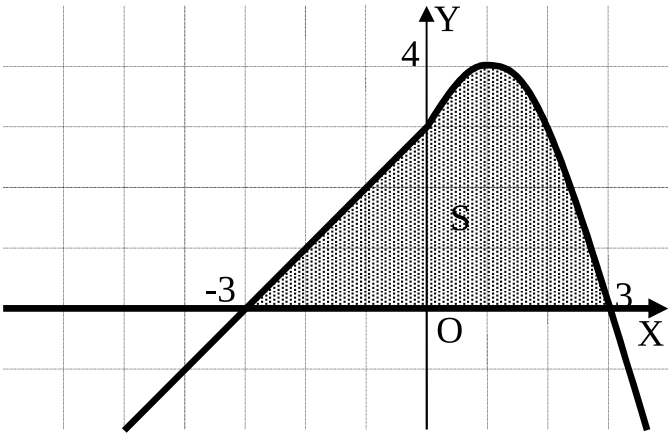
El área del recinto acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX es la siguiente:

$$S = \int_{-3}^{0}(x+3)\cdot dx + \int_{0}^{3}(-x^2+2x+3)\cdot dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-3}^{0} + \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}+3x\right]_{0}^{3} = \left[\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-3}^{0} + \left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{0}^{3} =$$

$$= 0 - \left[\frac{(-3)^2}{2}+3\cdot(-3)\right] + \left(-\frac{3^3}{3}+3^2+3\cdot 3\right) - 0 = -\frac{9}{2}+9-9+9+9 =$$

$$= 18 - \frac{9}{2} = \frac{36-9}{2} = \frac{27}{2}.$$



$$f(x) = \begin{cases} x+3 & si\ \ x<0 \\ -x^2+2x+3 & si\ \ x\geq 0 \end{cases}$$

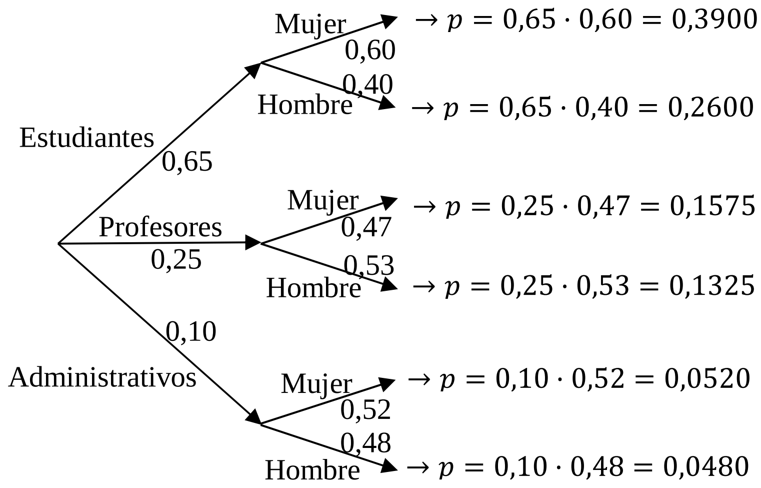
$$\underline{S = \frac{27}{2}\ u^2 = 13{,}5\ u^2.}$$

****

4º) En una universidad, el 65 % de sus miembros son estudiantes, el 25 % profesores y el 10 % personal de administración y servicios. Son mujeres el 60 % de los estudiantes, el 47 % de los profesores y el 52 % del personal de administración y servicios. Si seleccionamos al azar un integrante de esa universidad:

a) Determinar la probabilidad de que sea mujer.

b) Sabiendo que la persona seleccionada ha resultado ser hombre, hallar la probabilidad de que sea estudiante.



a)

$$P = 0{,}3900 + 0{,}1175 + 0{,}0520 = \underline{0{,}5595}.$$

b)

$$P = \frac{0{,}2600}{0{,}2600+0{,}1325+0{,}0480} = \frac{0{,}2600}{0{,}4405} = \underline{0{,}5902}.$$

****

5º) En una población el tiempo de desplazamiento de los trabajadores al lugar de trabajo sigue una distribución normal con desviación típica de 15 minutos. Tras realizar una encuesta a una muestra aleatoria de 60 trabajadores se ha encontrado que el tiempo medio de desplazamiento es de 45 minutos. Hallar un intervalo de confianza al 90 % para el tiempo medio de desplazamiento al lugar de trabajo de los individuos de la población.

$1-\alpha=0{,}90 \;\rightarrow\; \alpha=1-0{,}90=0{,}10 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}05}=\mathbf{1{,}645}$.
$(1-0{,}05=0{,}9500 \;\rightarrow z=1{,}645)$.

Conocemos: $\sigma=15$; $n=60$; $\overline{x}=45$; $z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}645$.

Se aplica la fórmula adecuada que nos da el intervalo de confianza pedido, que es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$I_{90\,\%}=\left(45-1{,}645\cdot\frac{15}{\sqrt{60}}, 45+1{,}645\cdot\frac{15}{\sqrt{60}}\right);$$

$(45-1{,}645\cdot 1{,}936, 45+1{,}645\cdot 1{,}936)$;

$(45-3{,}186, 45+3{,}186)$; $(41'814, 48'186)$.

$\underline{Intervalo\ de\ confianza\ al\ 90\ \%: (41'814, 48'186).}$

****

OPCIÓN B

1º) Un supermercado necesita, al menos, 80 docenas de huevos de tamaño pequeño, 120 docenas de tamaño mediano y 90 docenas de tamaño grande. Se abastece en dos granjas A y B. La granja A suministra lotes de 4 docenas de huevos pequeños, 12 docenas de medianos y 2 docenas de grandes, y el coste de cada lote es de 6 euros. La granja B proporciona lotes de 2 docenas de huevos pequeños, 2 docenas de medianos y 6 docenas de grandes, con un coste de 4 euros por lote. Además, la granja A puede suministrar, como máximo, 50 lotes y la granja B puede suministrar, como máximo, 60 lotes. Hallar el número de lotes que debe comprar a cada granja para satisfacer sus necesidades con el mínimo coste.

Sean x e y el número de lotes que abastecen al supermercado las granjas A y B, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} 4x+2y \geq 80 \\ 2x+2y \geq 120 \\ 2x+6y \geq 90 \\ x \leq 50; y \leq 60 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2x+y \geq 40 \\ x+y \geq 60 \\ x+3y \geq 45 \\ x \leq 50; y \leq 60 \end{array}\right\}.$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y) = 6x+4y$.

La región factible se indica en la figura:

$① \Rightarrow 2x+y \geq 40 \Rightarrow y \geq 40-2x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$

x	0	20
y	40	0

$② \Rightarrow 6x+y \geq 60 \Rightarrow y \geq 60-6x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$

x	0	10
y	60	0

$③ \Rightarrow x+3y \geq 45 \Rightarrow y \geq \frac{45-x}{3} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$

x	0	45
y	15	0

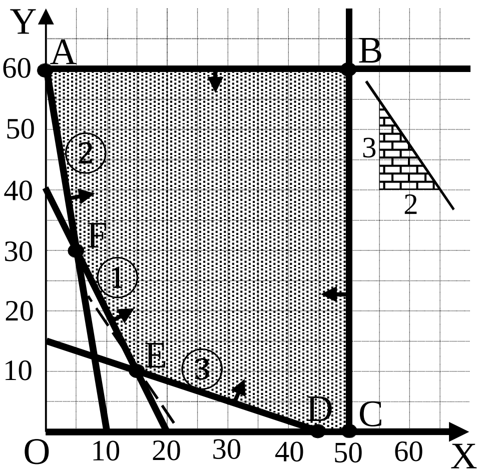
Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 6x+y=60 \\ y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A(0,60)}.$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=50 \\ y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{B(50,60)}.$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=50 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{C(50,0)}.$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=45 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{D(45,0)}.$



$E \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y=40 \\ x+3y=45 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{E(15,10)}.$ $\quad F \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y=40 \\ 6x+y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{E(5,30)}.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,60) = 6 \cdot 0 + 4 \cdot 60 = 0 + 240 = 240.$

$B \Rightarrow f(50,60) = 6 \cdot 50 + 4 \cdot 60 = 300 + 240 = 540.$

$C \Rightarrow f(50,0) = 6 \cdot 50 + 4 \cdot 0 = 60 + 0 = 300 + 0 = 300.$

$D \Rightarrow f(45,0) = 6 \cdot 45 + 4 \cdot 0 = 270 + 0 = 270.$

$E \Rightarrow f(15,10) = 6 \cdot 15 + 4 \cdot 10 = 90 + 40 = 130.$

$F \Rightarrow f(5,30) = 6 \cdot 5 + 4 \cdot 30 = 30 + 120 = 150.$

El mínimo se produce en el punto C.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y) = 6x + 4y = 0 \Rightarrow y = -\frac{6}{4}x \Rightarrow \boldsymbol{m} = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}.$$

$$\underline{Debe\ comprar\ 15\ lotes\ a\ la\ granja\ A\ y\ 10\ a\ la\ B\ para\ minimizar\ costes.}$$

****

2º) Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = e^{x^2-2} \cdot \sqrt{x+1}.$ $\qquad$ $b)\ g(x) = \frac{x^3-x}{x^2+2}.$

$a)$

$$f'(x) = 2x \cdot e^{x^2-2} \cdot \sqrt{x+1} + e^{x^2-2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} =$$

$$= 2xe^{x^2-2} \cdot \sqrt{x+1} + e^{x^2-2} \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{2(x+1)} = \frac{1}{2(x+1)} \cdot e^{x^2-2} \cdot \sqrt{x+1} \cdot [4x(x+1)+1] =$$

$$= \frac{4x^2+4x+1}{2(x+1)} \cdot e^{x^2-2} \cdot \sqrt{x+1}.$$

$$\underline{f'(x) = \frac{4x^2+4x+1}{2(x+1)} \cdot e^{x^2-2} \cdot \sqrt{x+1}.}$$

$b)$

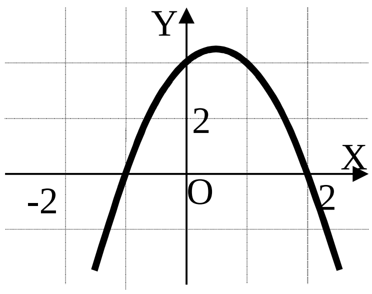
$$g'(x) = \frac{(3x^2-1)(x^2+2)-(x^3-x)\cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{3x^4+6x^2-x^2-2-2x^4+2x^2}{(x^2+2)^2} = \frac{x^4+7x^2-2}{(x^2+2)^2}.$$

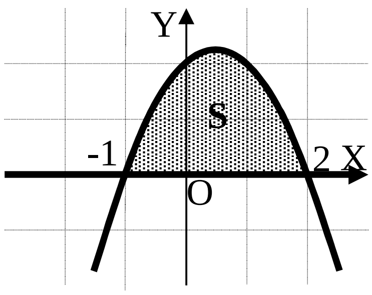
$$\underline{g'(x) = \frac{x^4+7x^2-2}{(x^2+2)^2}.}$$

****

3º) La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x) = -x^2 + x + a$, donde $a \in R$.

Sabiendo que el área encerrada por el recinto acotado que limita la curva con el eje OX vale $\frac{9}{2}$, utilizar esta información para hallar el valor del parámetro a.





De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{2} f(x) \cdot dx = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + a) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + ax\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}.$$

$$\left(-\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2a\right) - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + a \cdot (-1)\right] = \frac{9}{2};$$

$$-\frac{8}{3} + 2 + 2a - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + a = \frac{9}{2}; \;\; -\frac{9}{3} + 2 + 3a = \frac{9}{2} + \frac{1}{2}; \;\; 3a - 1 = 5; \;\; 3a = 6.$$

$$\underline{a = 2}.$$

****

4º) Cierto día, la probabilidad de que llueva en la ciudad A es 0,3, la de que no llueva en la ciudad B es 0,6 y la de que llueva, al menos, en una de las dos ciudades es 0,5.

a) Calcular la probabilidad de que no llueva en ninguna de las dos ciudades.

b) Calcular la probabilidad de que llueva en las dos. ¿Son independientes los sucesos "llueve en la ciudad A" y "llueve en la ciudad B".

$P(A) \rightarrow$ probabilidad de que llueva en la ciudad A.

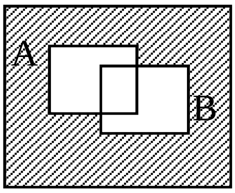
$P(B) \rightarrow$ probabilidad de que llueva en la ciudad B.

$P(\overline{A}) \rightarrow$ probabilidad de que no llueva en la ciudad A.

$P(\overline{B}) \rightarrow$ probabilidad de que no llueva en la ciudad B.

a)

$P(A) = 0{,}3;\ \ P(\overline{B}) = 0{,}6;\ \ P(A \cup B) = 0{,}5.$ Se pide: $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.



$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5.$

$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ no\ llueva\ en\ ninguna\ de\ las\ dos\ ciudades\ es\ 0{,}5.}$

b)

Se pide $P(A \cap B)$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}3 + 0{,}4 - 0{,}5 = 0{,}2.$

$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ llueva\ en\ las\ dos\ ciudades\ es\ 0{,}2.}$

Dos sucesos A y B son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$:

$P(A) \cdot P(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 \neq 0{,}2.$

$\underline{Los\ sucesos\ A\ y\ B\ no\ son\ independientes.}$

****

5º) Según un estudio, el porcentaje de adultos de la Unión Europea que hablan una lengua extranjera es del 64 %. En una encuesta aleatoria tomada en España de 250 adultos se ha obtenido que 128 hablan una lengua extranjera. A partir de estos datos, plantear un contraste para determinar si se puede aceptar que el porcentaje de adultos que hablan una lengua extranjera en España es igual al de la Unión Europea frente a la alternativa de que es menor, como parecen indicar los datos. ¿A qué conclusión se llega para un nivel de significación de 0,01?

$$\left.\begin{array}{l} Hipótesis\ nula \rightarrow\ H_0: \mu = 0{,}64 \\ Hipótesis\ alternativa \rightarrow H_1: \mu < 0{,}64 \end{array}\right\}.$$

Para $p_0 = \frac{128}{250} = 0'512, q_0 = 1 - 0{,}512 = 0'488, \alpha = 0{,}01\ y\ n = 250$:

El intervalo de confianza es, en este caso: $\left(p_0 - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot q_0}{n}}, p_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot q_0}{n}}\right)$.

$\alpha = 0{,}01.$ $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}005} = \mathbf{2{,}578}$.
$(1 - 0{,}005 = 0{,}9950\ \rightarrow z = 2{,}578)$.

$$\left(0{,}64 - 2{,}578 \cdot \sqrt{\frac{0{,}512 \cdot 0{,}488}{250}}, 0{,}64 + 2{,}578 \cdot \sqrt{\frac{0{,}512 \cdot 0{,}488}{250}}\right);$$

$(0{,}64 - 2{,}578 \cdot 0{,}0316, 0{,}64 + 2{,}578 \cdot 0{,}0316);\ (0{,}64 - 0'082, 0'64 + 0'082)\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ (\mathbf{0'558, 0'722})$.

La proporción de la muestra es $p = \frac{128}{250} = 0{,}512$.

Por NO encontrarse la proporción muestral en la zona de contraste:

$\underline{Se\ admite\ que\ el\ \%\ de\ españoles\ que\ hablan\ una\ lengua\ extranjera\ es\ menor}$

****