PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá elegir una opción A o B y responder a todas las cuestiones de esa opción. Nunca podrá mezclar cuestiones de la opción A con cuestiones de la opción B. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

OPCIÓN A

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Calcular A^t. b) Calcular $A \cdot B$.

c) Hallar la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que cumple $A \cdot B \cdot X = C + I$, donde $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad.

---

a)

$$\underline{A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.}$$

b)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.}$$

c)

$$A \cdot B \cdot X = C + I \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 3a + 2c & 3b + 2d \\ a - c & b - d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3a + 2c = 2 \\ a - c = 0 \end{matrix}\right\}; \left.\begin{matrix} 3b + 2d = -2 \\ b - d = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a = c;\ \ 5a = 2;\ \ a = c = \frac{2}{5}.\ \ b = d;\ \ 5b = -2;\ \ b = d = -\frac{2}{5}.$

$$\underline{X = \frac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}.$$

También se puede obtener la matriz X de la forma siguiente:

$A \cdot B \cdot X = C + I;\ \ (A \cdot B)^{-1} \cdot (A \cdot B) \cdot X = (A \cdot B)^{-1} \cdot (C + I);$

$I \cdot X = (A \cdot B)^{-1} \cdot (C + I)\ \Rightarrow\ \underline{X = (A \cdot B)^{-1} \cdot (C + I)}.$

$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5.$

$(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix};\ \ Adj.de\ (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$

$(A \cdot B)^{-1} = -\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$

$C + I = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

$X = (A \cdot B)^{-1} \cdot (C + I) = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$

$$\underline{X = \frac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) El volumen de agua (en millones de litros) almacenado en un embalse a lo largo de un periodo de 11 años en función del tiempo t (en años) viene dado por la siguiente función: $f(t) = t^3 - 24t^2 + 180t + 8.000$ con $9 \leq t \leq 11$. Calcular:

a) La cantidad de agua almacenada en el último año ($t = 11$).

b) El año del periodo en el que el volumen almacenado fue máximo.

c) El volumen máximo que tuvo el embalse a lo largo de ese periodo.

---

a)

$$f(11) = 11^3 - 24 \cdot 11^2 + 180 \cdot 11 + 8.000 =$$

$$= 1.331 - 2.904 + 1.980 + 8.000 = 11.311 - 2.904 = 8.407.$$

$$\underline{El\ agua\ almacenada\ el\ año\ 11\ fue\ de\ 8.407.000\ metros\ cúbicos}.$$

b)

El volumen almacenado es máximo cuando se anule su primera derivada y su segunda derivada sea negativa para los valores que anulan la primera:

$$f'(t) = 3t^2 - 48t + 180. \qquad f''(t) = 6t - 48.$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 48t + 180 = 0;\ \ t^2 - 16t + 60 = 0;\ \ t = \frac{16 \pm \sqrt{256-240}}{2} =$$

$$= \frac{16 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{16 \pm 4}{2} = 8 \pm 2 \Rightarrow t_1 = 6, t_2 = 10.$$

$$f''(6) = 6 \cdot 6 - 48 = 36 - 48 = -12 < 0 \Rightarrow Máx.\ para\ t = 6.$$

$$f''(10) = 6 \cdot 10 - 48 = 60 - 48 = 12 > 0 \Rightarrow Mín.\ para\ t = 10.$$

$$\underline{Se\ alcanzó\ el\ mayor\ volumen\ almacenado\ el\ sexto\ año}.$$

c)

$$f(6) = 6^3 - 24 \cdot 6^2 + 180 \cdot 6 + 8.000 = 216 - 864 + 1.080 + 8.000 =$$

$$= 9.296 - 864 = 8.432.$$

$$\underline{El\ agua\ máxima\ almacenada\ fue\ de\ 8.432.000\ metros\ cúbicos}.$$

****

3º) Calcular las siguientes integrales:

$a)\ \ I = \int_1^2 (-x^2 + 3x + 1) \cdot dx.$ $\qquad\qquad$ $b)\ \ I = \int \frac{2}{x+2} \cdot dx.$

$a)$

$$I = \int_1^2 (-x^2 + 3x + 1) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + x\right]_1^2 =$$

$$= \left(-\frac{2^3}{3} + \frac{3 \cdot 2^2}{2} + 2\right) - \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{3 \cdot 1^2}{2} + 1\right) = -\frac{8}{3} + 6 + 2 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} - 1 =$$

$$= -\frac{7}{3} + 7 - \frac{3}{2} = \frac{-14+42-9}{6} = \frac{42-23}{6} = \frac{19}{6}.$$

$$\underline{I = \int_1^2 (-x^2 + 3x + 1) \cdot dx = \frac{19}{6}.}$$

$b)$

$$I = \int \frac{2}{x+2} \cdot dx \Rightarrow \begin{Bmatrix} x + 2 = t \\ dx = dt \end{Bmatrix} \Rightarrow 2 \cdot \int \frac{1}{t} \cdot dt = 2L|t| + C = L(x+2)^2 + C.$$

$$\underline{I = \int \frac{2}{x+2} \cdot dx = L(x+2)^2 + C.}$$

****

4º) Una urna contiene tres bolas numeradas del 1 al 3. Se extraen sucesivamente las tres bolas:

a) Calcular la probabilidad de que las dos últimas bolas extraídas sean impares.

b) Determinar si los siguientes sucesos son independientes:

S_1: "sale número par antes de alguno de los impares".

S_2: "los dos números impares salen consecutivamente".

El número de formas de sacar las bolas es $n = P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Son las siguientes: $123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321$.

a)

$$P = \frac{\{213,\ 231\}}{\{123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321\}} = \frac{2}{6} = \underline{\frac{1}{3}}.$$

b)

$$P(S_1) = \frac{\{123,\ 213,\ 231,\ 321\}}{\{123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321\}} = \frac{4}{6} = \underline{\frac{2}{3}}.$$

$$P(S_2) = \frac{\{132,\ 213,\ 231,\ 312\}}{\{123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321\}} = \frac{4}{6} = \underline{\frac{2}{3}}.$$

$$P(S_1 \cap S_2) = \frac{\{213,\ 231\}}{\{123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321\}} = \frac{2}{6} = \underline{\frac{1}{3}}.$$

Dos sucesos son independientes si $P(S_1 \cap S_2) = P(S_1) \cdot P(S_2)$:

$$\frac{1}{3} \neq \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow \underline{Los\ sucesos\ S_1\ y\ S_2\ no\ son\ independientes}.$$

****

5º) En una muestra aleatoria de 175 individuos de una población se ha obtenido que 30 tienen más de 65 años. Hallar un intervalo de confianza al 90 % para la proporción de mayores de 65 años de la población.

$1-\alpha = 0{,}90 \ \rightarrow \ \alpha = 1-0{,}90 = 0{,}10 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}05} = \mathbf{1{,}645}.$
$(1-0{,}05 = 0{,}9500 \ \rightarrow z = 1{,}645).$

Datos: $n = 175$; $p = \frac{30}{175} = 0{,}1714$; $q = 0{,}8286$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0{,}1714 - 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3714 \cdot 0{,}6286}{175}};\ 0{,}1714 + 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3714 \cdot 0{,}6286}{175}}\right);$$

$(0{,}1714 - 1{,}645 \cdot 0{,}0285;\ 0{,}1714 + 1{,}645 \cdot 0{,}0285);$

$(0{,}1714 - 0{,}0469;\ 0{,}1714 + 0{,}0469).$

$$\underline{I.C._{90\,\%} = (0'1245;\ 0'2183).}$$

****

OPCIÓN B

1º) Una fábrica textil compra tela a dos distribuidores, A y B. Los distribuidores A y B venden la tela a 2 y 3 euros por metro, respectivamente. Cada distribuidor le vende un mínimo de 200 metros y un máximo de 700 y para satisfacer su demanda, la fábrica debe comprar en total como mínimo 600 metros. La fábrica quiere comprar al distribuidor A, como máximo, el doble de metros que al distribuidor B. Hallar los metros que debe comprar a cada uno de los distribuidores para obtener el mínimo coste. Determinar dicho coste mínimo.

Sean x e y el número de metros de tela que se compran a los distribuidores A y B, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones: $\left.\begin{array}{r} 200 \le x \le 700 \\ 200 \le y \le 700 \\ x + y \ge 600 \\ x \le 2y \end{array}\right\}$.

La función de rendimiento es $f(x, y) = 2x + 3y$.

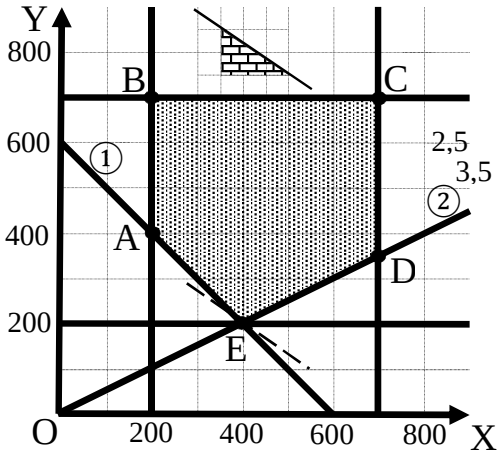
① $\Rightarrow x + y \ge 600 \Rightarrow y \ge 600 - x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$

x	0	600
y	600	0

② $\Rightarrow x \le 2y \Rightarrow y \ge \frac{1}{2}x \Rightarrow P(100,0) \rightarrow No.$

x	200	600
y	100	300

La región factible es la zona sombreada de la figura adjunta.



Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 200 \\ x + y = 600 \end{array}\right\} \Rightarrow A(200, 400).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 200 \\ y = 700 \end{array}\right\} \Rightarrow B(200, 700).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 700 \\ y = 700 \end{array}\right\} \Rightarrow C(700, 700).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 700 \\ x = 2y \end{array}\right\} \Rightarrow D(700, 350).$

$E \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 200 \\ x + y = 600 \end{array}\right\} \Rightarrow E(400, 200).$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(200, 400) = 2 \cdot 200 + 3 \cdot 400 = 400 + 1.200 = 1.600.$

$B \Rightarrow f(200, 700) = 2 \cdot 200 + 3 \cdot 700 = 400 + 2.100 = 2.500.$

$C \Rightarrow f(700, 700) = 2 \cdot 700 + 3 \cdot 700 = 1.400 + 2.100 = 3.500.$

$D \Rightarrow f(700, 350) = 2 \cdot 700 + 3 \cdot 350 = 1.400 + 1.050 = 2.450.$

$E \Rightarrow f(400, 200) = 2 \cdot 400 + 3 \cdot 200 = 800 + 600 = 1.400.$

El mínimo se produce en el punto C.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 2x + 3y = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x \Rightarrow \boldsymbol{m} = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}.$

$\underline{El\ coste\ es\ mínimo\ comprando\ 400\ metros\ al\ distribuidor\ A\ y\ 200\ al\ B}.$

$\underline{El\ coste\ mínimo\ es\ de\ 1.400\ euros}.$

****

2º) Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 7x^2 + a$; $g(x) = \sqrt{2x-1} + bx$, donde $a\ y\ \ b$ son números reales, hallar $a\ y\ b$ sabiendo que $f(1) = g(1)\ y\ f'(1) = g'(1)$.

$f(x) = x^3 - 7x^2 + a.$ $\qquad$ $f'(x) = 3x^2 - 14x.$

$g(x) = \sqrt{2x-1} + bx.$ $\qquad$ $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} + b.$

$f(1) = 1^3 - 7 \cdot 1^2 + a = 1 - 7 + a = a - 6.$

$g(1) = \sqrt{2 \cdot 1 - 1} + b \cdot 1 = 1 + b.$

$f(1) = g(1) \ \Rightarrow a - 6 = 1 + b;\ \ a - b = 7.$ $\qquad$ (*)

$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 14 \cdot 1 = 3 - 14 = -11.$

$g'(1) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1 - 1}} + b = 1 + b.$

$f'(1) = g'(1) \ \Rightarrow\ -11 = 1 + b\ \Rightarrow\ \underline{b = -12}$..

Sustituyendo el valor de b obtenido en la expresión (*):

$a - (-12) = 7;\ \ a + 12 = 7\ \Rightarrow\ \underline{a = -5}.$

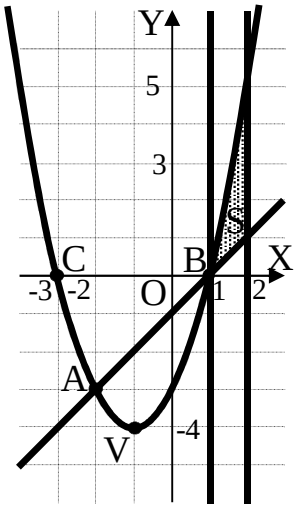
****

3º) Hallar el área del recinto acotado limitado por la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$, la recta $y = x - 1$ y las rectas $x = 1$ y $x = 2$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

Los puntos de intersección de la parábola y la recta son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$x^2 + 2x - 3 = x - 1;\ \ x^2 + x - 2 = 0;\ \ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \rightarrow A(-2,-3) \\ x_2 = 1 \rightarrow B(1,0) \end{cases}.$$



El vértice de la parábola es:

$$f'(x) = 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1.$$

$$f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 3 =$$

$$= 1 - 2 - 3 = -4 \ \Rightarrow\ V(-1,-4).$$

Los puntos de corte de la parábola con el eje X son los siguientes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0;\ \ x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = -1 \pm 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \rightarrow C(-3,0) \\ x_2 = 1 \rightarrow B(1,0) \end{cases}.$$

La representación gráfica del conjunto es la indicada en la figura adjunta.

Para el cálculo del área limitada por la parábola y la recta, que es la parte sombreada de la figura, se tiene en cuenta que, en el intervalo $(1,2)$ las ordenadas de la parábola son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la recta.

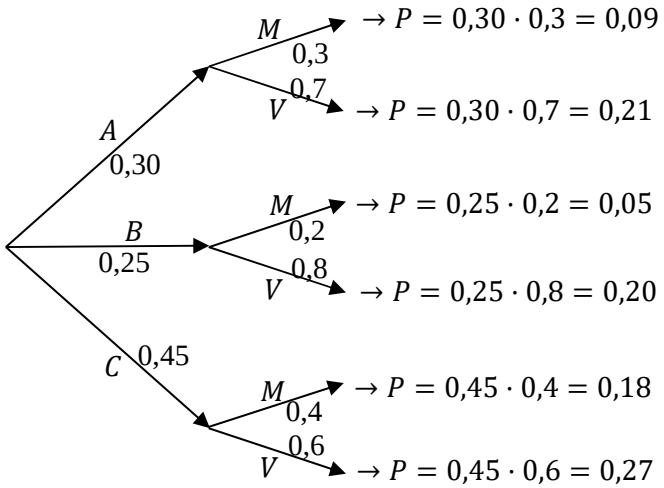
$$S = \int_1^2 [x^2 + 2x - 3 - (x-1)] \cdot dx = \int_1^2 (x^2 + 2x - 3 - x + 1) \cdot dx =$$

$$= \int_1^2 (x^2 + x - 2) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} - 2 \cdot 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} - 2 \cdot 1\right) =$$

$$= \frac{8}{3} + 2 - 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{3} - \frac{1}{2} = \frac{14-3}{6} = \underline{\frac{11}{6}\ u^2 \cong 1{,}83\ u^2}.$$

****

4º) En una población se ha determinado que de cada 100 consumidores de agua mineral, 30 consumen la marca A, 25 de la marca B y el resto la marca C. Además, el 30 % de consumidores de A, el 20 % de consumidores de B y el 40 % de consumidores de C son mujeres. Se selecciona al azar un consumidor de agua mineral de esa población y resulta ser mujer, hallar la probabilidad de que consuma la marca A.



$$P = P(A/M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{P(M) \cdot P(A/M)}{P(M) \cdot P(A/M) + P(M) \cdot P(B/M) + P(M) \cdot P(C/M)} =$$

$$= \frac{0{,}30 \cdot 0{,}3}{0{,}30 \cdot 0{,}3 + 0{,}25 \cdot 0{,}2 + 0{,}45 \cdot 0{,}4} = \frac{0{,}09}{0{,}09 + 0{,}05 + 0{,}18} = \frac{0{,}09}{0{,}32} = \underline{0{,}2813}.$$

****

5º) La duración de un tipo de bombillas sigue una distribución normal con desviación típica de 120 horas. Para estimar la duración media se quiere calcular un intervalo de confianza al 99 %. Determinar el tamaño mínimo que debe tener la muestra utilizada para el error cometido en la estimación sea menor de 25 horas.

Nivel de confianza del 99 %.

$\alpha = 1 - 0{,}99 = 0{,}01 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}005} = \mathbf{2{,}578}$.
$(1 - 0{,}0050 = 0{,}9950 \ \rightarrow z = 2{,}578)$.

Datos: $\sigma = 120$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}578$; $E = 25$.

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow \ \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2{,}578 \cdot \frac{120}{25}\right)^2 =$

$= (2{,}578 \cdot 4{,}8)^2 = 12{,}3744^2 = 153{,}13$.

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 154\ bombillas.}$

****