PRUEBA DE ACCESO ()

UNIVERSIDAD DE MURCIA

SEPTIEMBRE – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá elegir una opción A o B y responder a todas las cuestiones de esa opción. Nunca podrá mezclar cuestiones de la opción A con cuestiones de la opción B. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

OPCIÓN A

1º) Tres automóviles A, B y C salen del mismo punto en tres momentos distintos y los tres circulan a una velocidad constante de 100 km por hora. Actualmente la suma de las distancias recorridas por los tres es de 800 km y la distancia recorrida por A es el triple de la recorrida por B. Hallar la distancia recorrida por cada uno de ellos en la actualidad, sabiendo que cuando pase media hora (es decir, cuando todos hayan recorrido 50 km más) la suma de las distancias recorridas por A y B será 50 km más que la recorrida por C.

Siendo x, y, z las distancias recorridas actualmente por los automóviles A, B y C, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=800 \\ x=3y \\ (50+x)+(50+y)-50=z+50 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y+z=800 \\ x-3y=0 \\ x+y=z \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y+z=800 \\ x-3y=0 \\ x+y-z=0 \end{array}\right\}.$$

Restando a la primera ecuación la tercera: $2z=800;\ z=400.$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+400=800 \\ x-3y=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y=400 \\ x-3y=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y=400 \\ -x+3y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4y=400;\ y=100.$$

$x+y+z=800;\ x+400+100=800;\ x=300.$

$\underline{El\ automóvil\ A\ recorrió\ 300\ km, el\ B, 100\ km\ y\ el\ C, 400\ km.}$

****

2º) Dada la función $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ donde a y b son números reales, hallar el valor de a y b para que se cumpla que $f(0) = 1$ y $f'(0) = 1$.

$f(0) = 1 \Rightarrow \frac{0+b}{0+1} = 1 \Rightarrow \underline{b = 1}$. La función resulta: $f(x) = \frac{ax+1}{x^2+1}$.

$$f'(x) = \frac{a\cdot(x^2+1)-(ax+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{ax^2+a-2ax^2-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-ax^2-2x+a}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(0) = 1 \Rightarrow \frac{-a\cdot 0^2-2\cdot 0+a}{(0^2+1)^2} = 1;\ \ \frac{a}{1} = 1 \Rightarrow \underline{a = 1}.$$

****

3º) Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x+1 & si\ x < -3 \\ x^2+2x+1 & si\ -3 \leq x \end{cases}$:

a) Hacer la representación gráfica de dicha función.

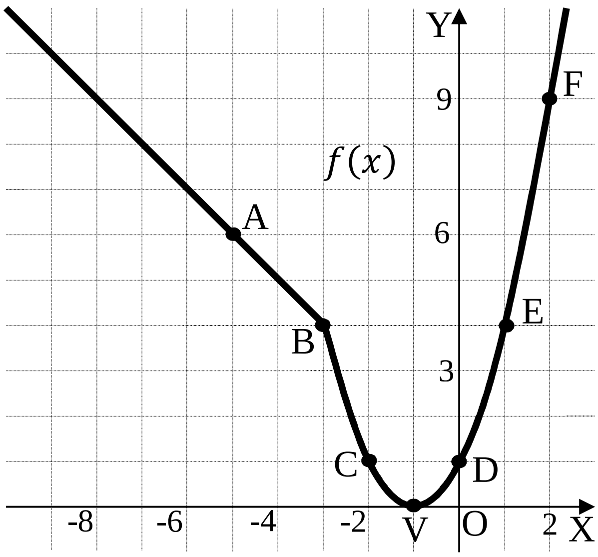
b) Hallar el área del recinto acotado limitado por el gráfica de la función $f(x)$ y la recta $y = 2x + 5$.

----

a)

Para la representación gráfica de la función tendremos en cuenta que en el intervalo $(-\infty, -3)$ y que dos de sus puntos son $A(-5, 6)$ y $B(-3, 4)$.

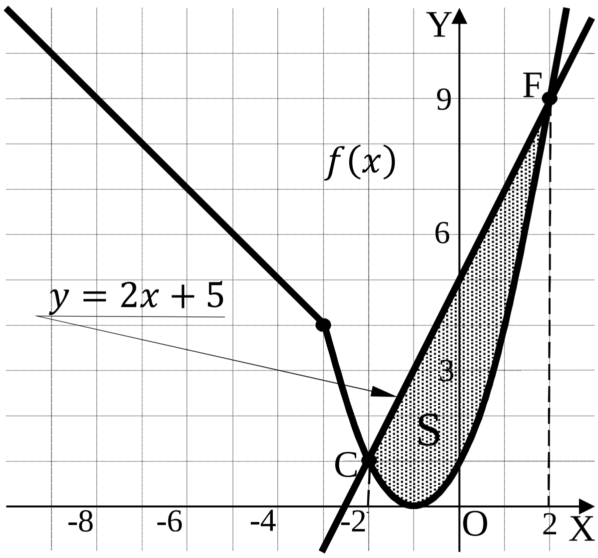
En el intervalo $[-3, +\infty)$ la función es la parábola $f(x) = x^2 + 2x + 1$ o también $f(x) = (x+1)^2$, que es convexa $(\cup)$ y cuyo vértice es $V(-1, 0)$. Otros puntos de la parábola son $A(-3, 4)$, $C(-2, 1)$, $D(0, 1), E(1, 4)$ y $F(2, 9)$.



La representación gráfica, aproximada, de la función es la que aparece en la figura adjunta.

b)

Los puntos de corte de la recta con la función tienen como abscisas las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus ecuaciones:



El punto de corte la recta $y = -x + 1$ con la recta dada $y = 2x + 5$ no pertenece al intervalo $(-\infty, -3)$, por lo tanto, los puntos de corte a determinar son los de la recta dada y la parábola $f(x) = (x+1)^2$.

$$2x + 5 = x^2 + 2x + 1;\ \ x^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \rightarrow C(-2, 1) \\ x_2 = 2 \rightarrow F(2, 9) \end{cases}.$$

De la observación de la figura de la derecha se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_{-2}^{2} [(2x+5) - (x^2+2x+1)] \cdot dx = \int_{-2}^{2} (4 - x^2) \cdot dx =$$

$$= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left[4 \cdot (-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right] = 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = 16 - \frac{16}{3} =$$

$$= \frac{48-16}{3} = \underline{\frac{32}{3}\ u^2 = S}.$$

****

4º) Para que un producto cosmético tenga el informe favorable de una agencia de sanidad debe superar tres pruebas de evaluación de garantía sanitaria. Las pruebas son independientes y todos los productos se someten a las tres pruebas. Se sabe, por otras ocasiones, que la probabilidad de superar la primera prueba es 0,8, la de superar la segunda es 0,75 y la de superar la tercera 0,85. Hallar:

a) La probabilidad de que un producto tenga el informe favorable.

b) La probabilidad de que un producto no tenga el informe favorable por fallar solamente en una prueba.

----

a)

$$P = P(1, 2, 3) = P(1) \cdot P(2) \cdot P(3) = 0{,}8 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}85 = \underline{0{,}51}.$$

b)

$$P = P\left(\overline{1}, 2, 3\right) + P\left(1, \overline{2}, 3\right) + P\left(1, 2, \overline{3}\right) =$$

$$= 0{,}2 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}85 + 0{,}8 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}85 + 0{,}8 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}15 =$$

$$= 0{,}1275 + 0{,}170 + 0{,}090 = \underline{0{,}3875}.$$

****

5º) El consumo de carne por persona en un año para una población es una variable aleatoria con distribución normal con desviación típica igual a 2 kg. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 individuos y se obtienen los siguientes consumos anuales por persona (en kg): 24, 20, 12, 10, 30, 27, 35, 30, 25, 39. Determinar el intervalo de confianza al 90 % para el consumo medio de carne por persona al año para la población.

$$\overline{x} = \frac{24+20+12+10+30+27+35+30+25+39}{10} = \frac{252}{10} = 25{,}2.$$

$\alpha = 1 - 0{,}90 = 0{,}10 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}05} = \mathbf{1{,}645}$.
$(1 - 0{,}9500 = 0{,}950 \ \rightarrow z = 1{,}645)$.

Datos: $n = 10$; $\overline{x} = 25{,}2$; $\sigma = 2$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(25{,}2 - 1{,}645 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}};\ 25{,}2 + 1{,}645 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}}\right);$$

$(25{,}2 - 1{,}645 \cdot 0{,}6325;\ 25{,}2 + 1{,}645 \cdot 0{,}6325);\ (25{,}2 - 1{,}0404;\ 25{,}2 + 1{,}0404)$.

$$\underline{I.C._{90\ \%} = (24{,}1596;\ 26{,}2404).}$$

****

OPCIÓN B

1º) Una perfumería prepara dos lotes de productos, el lote 1 contiene 2 perfumes, 2 jabones y 1 crema corporal y el lote 2 está formado por 1 perfume, 2 jabones y 2 cremas corporales. Sabiendo que dispone de 150 perfumes, 180 jabones y 150 cremas corporales y que el beneficio obtenido es de 45 euros por cada lote del tipo 1 y de 30 euros por cada lote del tipo 2, hallar el número de lotes que debe hacer de cada tipo para obtener el beneficio máximo. ¿Cuál es dicho beneficio?

Sean x e y el número de lotes de productos de los tipos 1 y 2 que prepara la perfumería, respectivamente.

Las restricciones son: $\left.\begin{array}{r} 2x+y \geq 150 \\ 2x+2y \leq 180 \\ x+2\,y \leq 150 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$ $o\ mejor$: $\left.\begin{array}{r} 2x+y \geq 150 \\ x+y \leq 90 \\ x+2\,y \leq 150 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$.

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y)=45x+30y$.

① $\Rightarrow 2x+y \leq 150 \Rightarrow y \leq 150-2x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	50	75
y	50	0

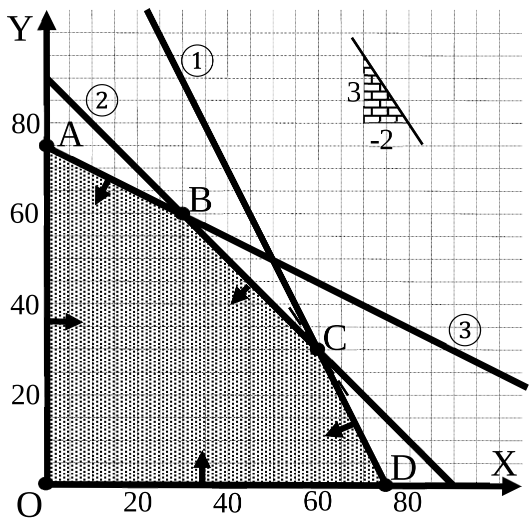
② $\Rightarrow x+y \leq 90 \Rightarrow y \leq 90-x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	90
y	90	0

③ $\Rightarrow x+2y \leq 150 \Rightarrow y \leq \frac{150-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	50
y	75	50

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.



Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+2y=150 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,75).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=90 \\ x+2y=150 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x-y=-90 \\ x+2y=150 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=50 \Rightarrow B(30,60).$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y=150 \\ x+y=90 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x+y=150 \\ -x-y=-90 \end{array}\right\} \Rightarrow x=60 \Rightarrow C(60,30).$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ 2x+y=150 \end{array}\right\} \Rightarrow D(75,0).$$

Los valores de la función de objetivos $f(x, y) = 45x + 30y$ en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 75) = 45 \cdot 0 + 30 \cdot 75 = 0 + 2.250 = 2.250.$

$B \Rightarrow f(30, 60) = 45 \cdot 30 + 30 \cdot 60 = 1.350 + 1.800 = 3.150.$

$C \Rightarrow f(60, 30) = 45 \cdot 60 + 30 \cdot 30 = 2.700 + 900 = 3.600.$

$D \Rightarrow f(75, 0) = 45 \cdot 75 + 30 \cdot 0 = 3.375 + 0 = 3.375.$

El máximo se produce en el punto $C(60, 30)$.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 45x + 30y = 0 \Rightarrow y = -\frac{45}{30}x = -\frac{3}{2}x \Rightarrow \boldsymbol{m} = -\boldsymbol{\frac{3}{2}}.$

$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ haciendo\ 60\ lotes\ de\ tipo\ 1\ y\ 30\ lotes\ de\ tipo\ 2.}$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 3.600\ euros.}$

****

2º) Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x+1}}$. $b)\ g(x) = x^2 \cdot e^{x^2}$.   c) $h(x) = \frac{L(x^2)}{x}$.

$a)$

$$f(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{2x+1} - x \cdot \frac{2}{2\sqrt{2x+1}}}{\left(\sqrt{2x+1}\right)^2} = \frac{\sqrt{2x+1} - \frac{x}{\sqrt{2x+1}}}{2x+1} = \frac{\frac{2x+1-x}{\sqrt{2x+1}}}{2x+1} = \frac{x+1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}} = \frac{(x+1)\sqrt{2x+1}}{(2x+1)^2}.$$

$$\underline{f'(x) = \frac{(x+1)\sqrt{2x+1}}{(2x+1)^2}}.$$

$b)$

$$g'(x) = 2x \cdot e^{x^2} + x^2 \cdot 2x \cdot e^{x^2} = 2x \cdot e^{x^2} \cdot (1 + x^2).$$

$$\underline{g'(x) = 2x \cdot e^{x^2} \cdot (1 + x^2)}.$$

c)

$$h(x) = \frac{L(x^2)}{x} = \frac{2 \cdot Lx}{x} = 2 \cdot \frac{Lx}{x}.$$

$$h'(x) = 2 \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - Lx \cdot 1}{x^2} = 2 \cdot \frac{1 - Lx}{x^2}.$$

$$\underline{h'(x) = \frac{2(1 - Lx)}{x^2}}.$$

****

3º) Dada la función $f(x) = 2 \cdot e^{2x-2}$ hallar la función primitiva $F(x)$ que cumple que $F(1) = 0$.

$$F(x) = \int 2 \cdot e^{2x-2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 2x - 2 = t \\ 2 \cdot dx = dt \end{matrix} \right\} \Rightarrow \int e^t \cdot dt = e^t + C = e^{2x-2} + C.$$

$$F(1) = 0 \Rightarrow e^{2 \cdot 1 - 2} + C = 0;\ \ e^0 + C = 0 \Rightarrow C = -1.$$

$$\underline{F(x) = e^{2 \cdot x - 2} - 1}.$$

****

4º) En un grupo el 60 % de los alumnos aprueba la asignatura A y el 30 % aprueba la asignatura B. Se sabe, además, que el 10 % de los alumnos que aprueba la asignatura B aprueba también la asignatura A. Hallar el porcentaje de alumnos del grupo que aprueba alguna de las dos asignaturas.

$Datos: P(A) = 0{,}6;\ P(B) = 0{,}3;\ \ P(A/B) = 0{,}1.$

Se pide $P(A \cup B)$.

$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) = 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}03.$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}3 - 0{,}03 = 0{,}87.$

$\underline{Aprueba\ alguna\ de\ las\ dos\ asignatura\ el\ 87\ \%\ de\ los\ alumnos\ del\ grupo.}$

****

5º) La estatura de los individuos de una población es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica de 0,4 m. Para estimar la media se toma una muestra aleatoria de tamaño n y se encuentra un valor medio de la estatura igual a 1,6 m. Si el intervalo de confianza al 95 % construido a partir de esos datos es $(1{,}5216;\ 1{,}6784)$, calcular el valor de n.

$\overline{x} = \frac{1{,}6784+1{,}5216}{2} = \frac{3{,}2}{2} = 1{,}6.$

$E = \frac{1{,}6784-1{,}5216}{2} = \frac{0{,}1568}{2} = 0{,}0784.$

$\alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = \mathbf{1{,}96}.$
$(1 - 0{,}025 = 0{,}9750 \ \rightarrow z = 1{,}96).$

Datos: $\overline{x} = 1{,}6;\ \sigma = 0{,}4;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96;\ \ E = 0{,}0784.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow \ \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \ \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1{,}96 \cdot \frac{0{,}4}{0{,}0784}\right)^2 =$

$= (1{,}96 \cdot 5{,}1020)^2 = 10^2 = 100.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 100\ individuos.}$

****