

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)**UNIVERSIDAD DE MURCIA****JUNIO – 2018**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá elegir una opción A o B y responder a todas las cuestiones de esa opción. Nunca podrá mezclar cuestiones de la opción A con cuestiones de la opción B. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

OPCIÓN A

1º) Discutir el sistema
$$\begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ y + z = 1 \\ ax + y - 2z = 4 \end{cases}$$
 en función del parámetro a . Resolverlo para $a = 2$.

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 2a + a - 1 = 0; \quad 3a - 3 = 0; \quad a - 1 = 0; \quad a = 1.$$

$$\underline{\text{Para } a \neq 1 \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3 = n^{\circ} \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.D.}}$$

$$\text{Para } a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 2 - 6 - 1 = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } M' = 3.$$

$$\underline{\text{Para } a = 1 \Rightarrow \text{Rang } M = 2; \text{ Rang } M' = 3 \Rightarrow \text{Sistema incompatible.}}$$

b)

Para $a = 2$ el sistema resulta $\begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ y + z = 1 \\ 2x + y - 2z = 4 \end{cases}$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{3 \cdot 2 - 3} = \frac{-12 - 1 + 8 + 4 - 6 + 4}{3} = \frac{-19 + 16}{3} = \frac{-3}{3} = -1.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-2 + 12 + 2 - 4}{3} = \frac{8}{3}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{3} = \frac{4 + 4 - 12 - 1}{3} = \frac{8 - 13}{3} = -\frac{5}{3}.$$

$$\underline{\text{Solución: } x = -1, y = \frac{8}{3}, z = -\frac{5}{3}.$$

2º) Una empresa fabrica un determinado producto, que vende al precio unitario de 15 euros. La función de costes, que representa el coste (en unidades monetarias) en función del número de unidades de producto, es $C(x) = 2x^2 - 45x + 300$, donde x es el número de unidades del producto. Hallar el número de unidades que ha de vender para obtener el máximo beneficio, sabiendo que el beneficio es igual al ingreso total obtenido por la venta menos los costes. Calcular el beneficio máximo.

La función ingresos es $I(x) = 15x$.

$$\begin{aligned} \text{La función beneficios es: } B(x) &= I(x) - C(x) = 15x - (2x^2 - 45x + 300) = \\ &= 15x - 2x^2 + 45x - 300 = \underline{-2x^2 + 60x - 300 = B(x)}. \end{aligned}$$

Para que una función tenga un máximo relativo son condiciones necesarias que se anule su primera derivada y que sea negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$f'(x) = -4x + 60. \quad f''(x) = -4 < 0 \Rightarrow \text{Justificación de máximo.}$$

$$f'(0) = 0 \Rightarrow -4x + 60 = 0; -x + 15 = 0 \Rightarrow x = 15.$$

El máximo beneficio se alcanza vendiendo 15 unidades.

$$\begin{aligned} B(15) &= -2 \cdot 15^2 + 60 \cdot 15 - 300 = -2 \cdot 225 + 900 - 300 = \\ &= 600 - 450 = 150. \end{aligned}$$

El beneficio máximo es de 150 unidades monetarias.

3º) Hallar el área del recinto acotado limitado por la gráfica de la función $y = x^2 - x - 2$, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 2$. Hacer la representación gráfica de dicha área.

Los puntos de intersección de la parábola con el eje OX son los siguientes:

$$y = x^2 - x - 2 = 0; \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \rightarrow A(-1, 0) \\ x_2 = 2 \rightarrow B(2, 0) \end{cases}.$$

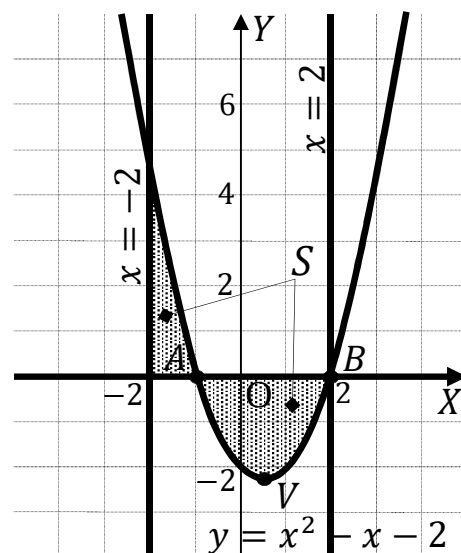
El vértice de la parábola es el siguiente:

$$y' = 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 =$$

$$= \frac{1-2-8}{4} = -\frac{9}{4} \Rightarrow V\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right).$$

La representación gráfica de la situación se expresa, aproximadamente, en la figura adjunta, de la cual se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:



$$S = \int_{-2}^{-1} f(x) \cdot dx + \int_{-1}^2 f(x) \cdot dx = [F(x)]_{-2}^{-1} + [F(x)]_{-1}^2 =$$

$$= F(-1) - F(-2) + F(2) - F(-1) = F(2) - F(-2). \quad (*)$$

Teniendo en cuenta que $F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int (x^2 - x - 2) \cdot dx =$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x, \text{ sustituyendo en la expresión (*) resulta:}$$

$$S = 2 \cdot \left[\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} - 2 \cdot (-1) \right] - \left[\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} - 2 \cdot (-2) \right] - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} - 2 \cdot 2 \right) =$$

$$= 2 \cdot \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) - \left(-\frac{8}{3} - 2 + 4 \right) - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4 \right) =$$

$$= -\frac{2}{3} - 1 + 4 + \frac{8}{3} - 2 - \frac{8}{3} + 6 = 7 - \frac{2}{3} = \frac{19}{3}$$

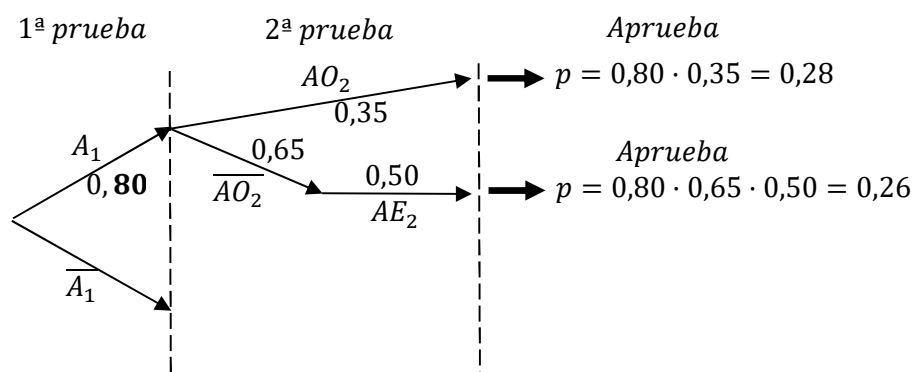
$$\underline{S = \frac{19}{3} u^2 \cong 6,333 u^2.}$$

4º) El examen de una asignatura consta de tres pruebas. La primera prueba es superada por el 80 % de los alumnos que la realizan. Esta prueba es eliminatoria, por lo que si no se supera no se pueden realizar las otras, y se suspende la asignatura. La segunda prueba tiene dos convocatorias en las que puede superarse, la ordinaria y la extraordinaria (para alumnos que no la hayan superado en la ordinaria). Superan esta prueba el 35 % de los alumnos en la convocatoria ordinaria y el 50 % de los alumnos que se presentan a la extraordinaria. La tercera prueba solo pueden realizarla los alumnos que tienen las otras dos pruebas superadas, y la supera el 75 % de los alumnos presentados.

a) Calcular la probabilidad de superar las dos primeras pruebas.

b) Si el requisito para aprobar la asignatura es que se superen las tres pruebas, hallar la probabilidad de aprobar la asignatura.

a)



$$P = P(A_1) \cdot P(AO_2/A_1) + P(A_1) \cdot P(\overline{AO_2}/A_1) \cdot P(AE_2/A_1) =$$

$$= 0,80 \cdot 0,35 + 0,80 \cdot 0,65 \cdot 0,50 = 0,28 + 0,26 = \underline{0,54}.$$

b)

$$P = P(A_1) \cdot P(AO_2/A_1) \cdot P(A_3) + P(A_1) \cdot P(\overline{AO_2}/A_1) \cdot P(AE_2/A_1) \cdot P(A_3) =$$

$$= 0,80 \cdot 0,35 \cdot 0,75 + 0,80 \cdot 0,65 \cdot 0,50 \cdot 0,75 = 0,28 \cdot 0,75 + 0,26 \cdot 0,75 =$$

$$= 0,75 \cdot (0,28 + 0,26) = 0,75 \cdot 0,54 = \underline{0,405}.$$

5º) En una muestra aleatoria de tamaño 200 árboles de una población se ha obtenido que 45 tienen una plaga. Hallar un intervalo de confianza al 90 % para la proporción de árboles de la población que tienen la plaga.

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 1 - 0,90 = 0,10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,645.$$
$$1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645).$$

$$\text{Datos: } p = \frac{45}{200} = 0,225; \quad q = 0,775; \quad n = 200; \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645.$$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n , es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}; p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \right).$

$$\left(0,225 - 1,645 \cdot \sqrt{\frac{0,225 \cdot 0,775}{200}}; 0,225 + 1,645 \cdot \sqrt{\frac{0,225 \cdot 0,775}{200}} \right);$$

$$(0,225 - 1,645 \cdot 0,0295; 0,225 + 1,645 \cdot 0,0295);$$

$$(0,225 - 0,0486; 0,225 + 0,0486).$$

$$\underline{I.C._{90\%} = (0,1764; 0,2736)}.$$

OPCIÓN B

1º) Una fábrica produce dos modelos de bolsos, tipo A y tipo B. Cada bolso tipo A requiere 5 m² de piel y 5 horas de trabajo y cada bolso del modelo B requiere 5 m² de piel y 10 horas de trabajo. Dispone de 200 m² de piel y 225 horas de trabajo. Además, quiere producir mayor o igual número de bolsos tipo A que B. El beneficio obtenido es de 50 euros por cada bolso tipo A y 80 euros por cada bolso tipo B. Hallar el número de bolsos que debe fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio. Calcular dicho beneficio máximo.

Sean x e y el número bolsos de los tipos A y B que se fabrican, respectivamente.

Las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 5y \leq 200 \\ 5x + 10y \leq 225 \\ x \geq y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x + y \leq 40 \\ x + 2y \leq 45 \\ x - y \geq 0 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

① $\Rightarrow x + y \leq 40 \Rightarrow y \leq 40 - x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	40	0
y	0	40

② $\Rightarrow x + 2y \leq 45 \Rightarrow y \leq \frac{45-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	45	25
y	0	16

③ $\Rightarrow x - y \geq 0 \Rightarrow y \leq x \Rightarrow P(10,0) \rightarrow Si.$

x	0	40
y	0	40

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

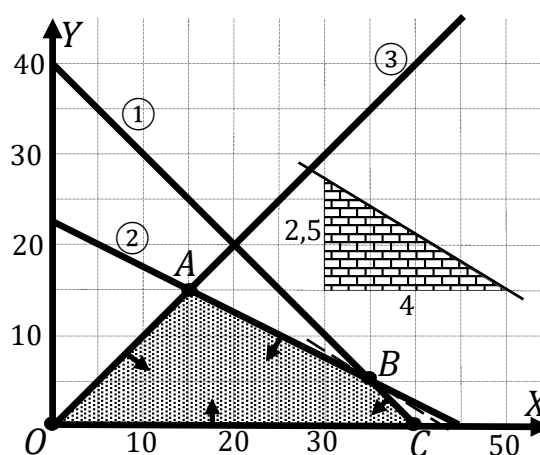
$$A \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y = 45 \\ x = y \end{array} \right\} \Rightarrow 3y + 45 = 0;$$

$$y + 15 = 0; x = y = 15 \Rightarrow A(15, 15).$$

$$B \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 40 \\ x + 2y = 45 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -x - y = -40 \\ x + 2y = 45 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 5; x = 35 \Rightarrow B(35, 5).$$

$$C \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 0 \\ x + y = 40 \end{array} \right\} \Rightarrow C(40, 0).$$



La función de objetivos es la siguiente: $f(x, y) = 50x + 80y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(15, 15) = 50 \cdot 15 + 80 \cdot 15 = 750 + 1.200 = 1.950.$$

$$B \Rightarrow f(35, 5) = 50 \cdot 35 + 80 \cdot 5 = 1.750 + 400 = 2.150.$$

$$C \Rightarrow f(40, 0) = 50 \cdot 40 + 80 \cdot 0 = 2.000 + 0 = 2.000.$$

El máximo se produce en el punto $B(35, 5)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 50x + 80y = 0 \Rightarrow y = -\frac{50}{80}x = -\frac{5}{8}x = -\frac{2,5}{4}x \Rightarrow m = -\frac{-2,5}{4}.$$

Debe fabricar 35 bolsos tipo A y 5 bolsos tipo B.

El beneficio máximo es de 2.150 euros.

2º) Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{-1}{\sqrt[5]{5x+1}}.$

b) $g(x) = x^2 \cdot Lx^2.$

c) $h(x) = e^{-3x+x^2}.$

a)

$$f(x) = \frac{-1}{\sqrt[5]{5x+1}} = -(5x+1)^{-\frac{1}{5}}.$$

$$f'(x) = \frac{1}{5} \cdot (5x+1)^{-\frac{1}{5}-1} \cdot 5 = (5x+1)^{-\frac{6}{5}} = \frac{1}{(5x+1)^{\frac{6}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{(5x+1)^6}}.$$

$$\underline{f'(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{(5x+1)^6}} = \frac{1}{(5x+1)^{\frac{6}{5}}} = \frac{\sqrt[5]{(5x+1)^4}}{(5x+1)^2}.$$

b)

$$g(x) = x^2 \cdot Lx^2 = x^2 \cdot 2 \cdot Lx = 2x^2 \cdot Lx.$$

$$g'(x) = 4x \cdot Lx + 2x^2 \cdot \frac{1}{x} = 4x \cdot Lx + 2x.$$

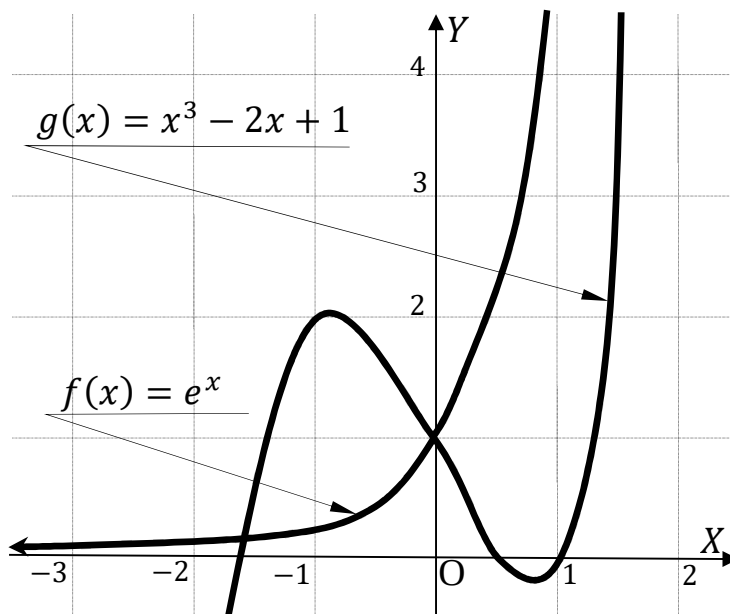
$$\underline{g'(x) = 4x \cdot Lx + 2x = 2x \cdot (2Lx + 1)}.$$

c)

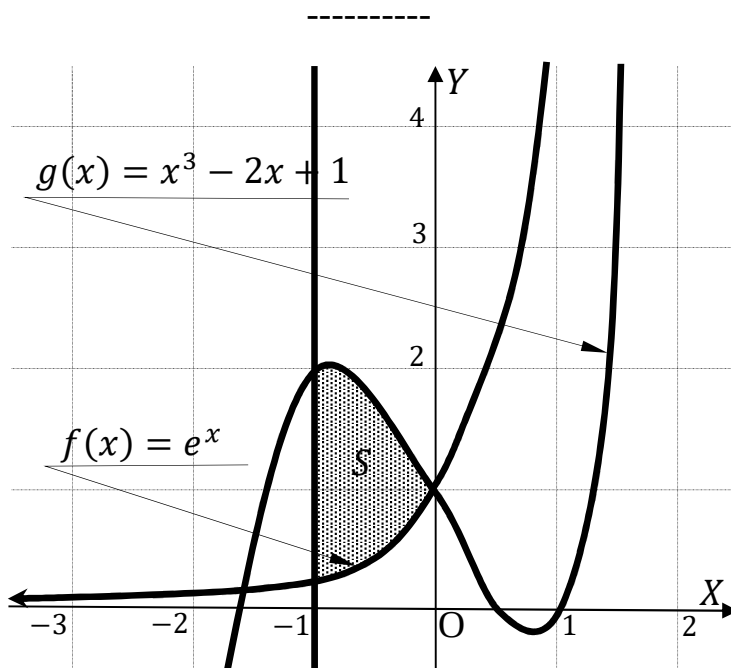
$$h(x) = e^{-3x+x^2}.$$

$$\underline{h'(x) = (2x - 3) \cdot e^{-3x+x^2}}.$$

3º) Dadas las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = x^3 - 2x + 1$, cuyas gráficas aparecen en la figura adjunta.



Hallar el área del recinto acotado limitado por las dos gráficas y las rectas $x = -1$ y $x = 0$.



De la observación de la figura, en el intervalo $(-1, 0)$, todas las ordenadas de la función $g(x) = x^3 - 2x + 1$ son mayores que las correspondientes ordenadas de la función $f(x) = e^x$, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^0 [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_{-1}^0 [(x^3 - 2x + 1) - e^x] \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^2}{2} + x - e^x \right]_{-1}^0 = \left[\frac{x^4}{4} - x^2 + x - e^x \right]_{-1}^0 =$$

$$= -e^0 - \left[\frac{(-1)^4}{4} - (-1)^2 + (-1) - e^{-1} \right] = -1 - \frac{1}{4} + 1 + 1 + \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{e} =$$

$$= \frac{4e - e + 4}{4e} = \frac{3e + 4}{4e}.$$

$$\underline{S = \frac{3e+4}{4e} u^2 = 1,12 u^2.}$$

4º) La probabilidad de que un autobús llegue con retraso a una parada es 0,2. Si pasa cuatro veces a lo largo del día por la parada, calcular la probabilidad de que:

a) No llegue con retraso ninguna de las veces.

b) Llegue con retraso al menos una vez.

c) Al menos tres veces llegue con retraso.

d) Llegue con retraso exactamente dos veces consecutivas.

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

Retraso: $p = 0,2$; puntual: $q = 0,8$; $n = 4$; $r = \text{veces con retraso}$.

Sabiendo que la fórmula de la probabilidad de la distribución binomial es $P = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$.

a)

$$r = 0 \Rightarrow p = \binom{4}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^4 = 1 \cdot 1 \cdot 0,4096 = \underline{0,4096}.$$

b)

Que “llegue con retraso al menos una vez” es el suceso contrario de “no llegar tarde ninguna vez”.

$$P = 1 - 0,4096 = \underline{0,5994}.$$

c)

$$\begin{aligned} r = 3 \text{ y } r = 4 \Rightarrow p &= \binom{4}{3} \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^1 + \binom{4}{4} \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^0 = \\ &= 4 \cdot 0,008 \cdot 0,8 + 1 \cdot 0,0016 \cdot 1 = 0,0256 + 0,0016 = \underline{0,0272}. \end{aligned}$$

d)

Las veces pueden ser: $1^a - 2^a$; $2^a - 3^a$; $3^a - 4^a$; o sea: tres veces

$$P = 3 \cdot (0,2 \cdot 0,2) = \underline{0,12}.$$

5º) La altura para una determinada población sigue una distribución normal con una desviación típica conocida σ . Para hallar un intervalo de confianza para la media de la población se ha tomado una muestra aleatoria simple de 100 individuos, obteniéndose una altura media de 145 cm. Si el intervalo de confianza con un nivel de significación 0,05 construido a partir de los datos anteriores es (135,2; 154,8), hallar el valor de σ .

$$E = \frac{154,8-135,2}{2} = \frac{19,6}{2} = 9,8.$$

Para un nivel de significación 0,05 es:

$$\alpha = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$$

$$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$$

$$\text{Datos: } n = 100; \quad E = 9,8; \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sigma = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{z_{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{9,8 \cdot \sqrt{100}}{1,96} = \frac{98}{1,96} = 50.$$

La desviación típica es $\sigma = 50$.
