PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

SEPTIEMBRE – 2019

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá elegir una opción A o B y responder a todas las cuestiones de esa opción. Nunca podrá mezclar cuestiones de la opción A con cuestiones de la opción B. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

OPCIÓN A

1º) Discutir el sistema lineal $\left.\begin{array}{r} 2x+y-z=0 \\ ax-y-z=a-1 \\ 3x-2az=a-1 \end{array}\right\}$ en función de los valores reales del parámetro a. Resolverlo para $a=0$.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ a & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2a \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ a & -1 & -1 & a-1 \\ 3 & 0 & -2a & a-1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ a & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2a \end{vmatrix}=4a-3-3+2a^2=2a^2+4a-6=0;$$

$$a^2+2a-3=0;\ \ a=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{-2\pm4}{2}=-1\pm2 \Rightarrow x_1=-3, x_2=1.$$

$$\underline{Para\ \left\{\begin{array}{c} a\neq-3 \\ a\neq1 \end{array}\right\} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=-3 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & 6 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix}=8-12-12=-16\neq0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ a = -3 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$

Para $a = 0$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} 2x + y - z = 0 \\ -y - z = -1 \\ 3x = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow x = -\frac{1}{3}.$

$$\left.\begin{array}{r} -\frac{2}{3} + y - z = 0 \\ y + z = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} y - z = \frac{2}{3} \\ y + z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \Rightarrow y = \frac{5}{6}.$$

$$\frac{5}{6} + z = 1;\ \ z = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}.$$

$$\underline{Solución: x = -\frac{1}{3},\ y = \frac{5}{6},\ z = \frac{1}{6}.}$$

****

2º) Determine el punto de la gráfica de la función $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 7x + 5$ en la que la pendiente de la recta tangente sea máxima. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en ese punto?

El valor de la pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$m \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 12x - 7.$

Una función tiene un máximo cuando se anula su primera derivada y es negativa su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

La primera derivada de $f'(x)$ es $f''(x) = -6x + 12.$

$f''(x) = 0 \Rightarrow -6x + 12 = 0;\ -x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2.$

La segunda derivada de $f'(x)$ es $f'''(x) = -6 < 0 \Rightarrow Justificación\ de\ Máx.$

$f(2) = -2^3 + 6 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 5 = -8 + 24 - 14 + 5 = 7.$

$\underline{El\ punto\ pedido\ es\ P(2, 7)}.$

$m = f'(2) = -3 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 7 = -12 + 24 - 7 = 5.$

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(2, 7)$ con $m = 5$ es:

$y - 7 = 5(x - 2) = 5x - 10.$

$\underline{La\ recta\ tangente\ pedida\ es\ t \equiv 5x - y - 3 = 0}.$

****

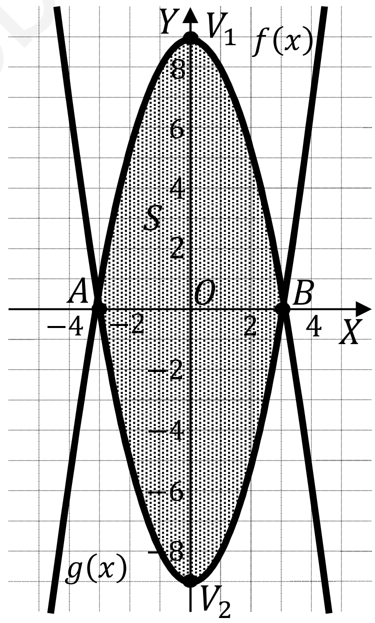
3º) Representar gráficamente la región limitada por las funciones $f(x) = 9 - x^2$ y $g(x) = x^2 - 9$. Calcular su área.

Las abscisas de los puntos de intersección de las curvas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 9 - x^2 = x^2 - 9;\ 2x^2 = 18;\ x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \rightarrow A(-3, 0) \\ x_2 = 3 \rightarrow B(3, 0) \end{cases}.$$

La parábola $f(x) = 9 - x^2$, que es cóncava $(\cap)$ por ser negativo el coeficiente de x^2, tiene su vértice en el punto $V_1(0, 9)$. Sus puntos de corte con el eje OX son los puntos de corte con $g(x)$.

La parábola $g(x) = x^2 - 9$, que es convexa $(\cup)$ por ser positivo el coeficiente de x^2, tiene su vértice en el punto $V_2(9, 0)$. Sus puntos de corte con el eje OX son los puntos de corte con $f(x)$.



La representación gráfica de la situación se expresa en la figura adjunta.

Por ser las ordenadas de la parábola de ecuación $g(x) = 9 - x^2$ iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de $f(x) = x^2 - 9$ en el intervalo del área a calcular y, además, considerando que las dos funciones son pares y, en consecuencia, simétricas con respecto al eje de ordenadas, la superficie S a calcular es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^3 [g(x) - f(x)] \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \int_0^3 [(9 - x^2) - (x^2 - 9)] \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \int_0^3 (18 - 2x^2) \cdot dx = 4 \cdot \int_0^3 (9 - x^2) \cdot dx = 4 \cdot \left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 =$$

$$= 4 \cdot \left[\left(9 \cdot 3 - \frac{3^3}{3}\right) - 0\right] = 4 \cdot (27 - 9) = 4 \cdot 18 = 72.$$

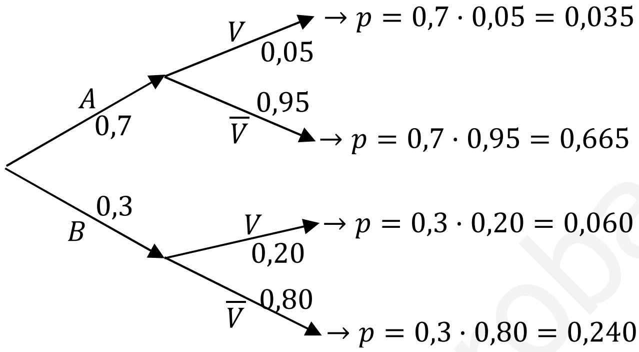
$$\underline{S = 72\ u^2}.$$

****

4º) En un taller mecánico el 70 % de los coches que se reparan son del modelo A y el resto de un modelo B. Después de 6 meses, el 95 % de los coches del modelo A no vuelven al taller mientras que del modelo B solo no vuelven el 80 %. Si elegimos un coche al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que vuelva al taller antes de 6 meses?

b) Si se observa que antes de los seis meses vuelve al taller, ¿cuál es la probabilidad de que sea del modelo B?



a)

$$P = P(V) = P(A \cap V) + P(B \cap M) = P(A) \cdot P(V/A) + P(B) \cdot P(V/B) =$$

$$= 0{,}7 \cdot 0{,}05 + 0{,}3 \cdot 0{,}20 = 0{,}035 + 0{,}060 = \underline{0{,}095}.$$

c)

$$P = P(B/V) = \frac{P(B \cap V)}{P(V)} = \frac{P(B) \cdot P(V/B)}{P(V)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}20}{0{,}095} = \frac{0{,}060}{0{,}095} = \underline{0{,}6316}.$$

****

5º) Se sabe que la estatura de los individuos de Murcia es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con desviación típica de 6 cm. Se toma una muestra aleatoria de 225 individuos y da una media de 176 cm. Obtenga un intervalo de confianza, con un 99 % de confianza, para la media de la estatura de la población.

Para un nivel de confianza del 99 % es:

$1-\alpha=0{,}99 \ \rightarrow \ \alpha=1-0{,}99=0{,}01 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}005}=2{,}575.$
$(1-0{,}005=0{,}9950 \ \rightarrow z=2{,}575).$

Datos: $n=225;\ \ \overline{x}=176;\ \ \sigma=6;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=2{,}575.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(176-2{,}575\cdot\frac{6}{\sqrt{225}};\ 176+2{,}575\cdot\frac{6}{\sqrt{225}}\right);$

$(176-2{,}575\cdot 0{,}4;\ 176+2{,}575\cdot 0{,}4);\ \ (176-1{,}03;\ 176+1{,}03)$

$$\underline{I.C._{99\,\%}=(174{,}97;\ 177{,}03).}$$

****

OPCIÓN B

1º) Un joven emprendedor quiere montar una empresa informática donde comercializará dos tipos de ordenadores. El tipo A dispondrá de 1 disco duro y 1 unidad de memoria de pequeña capacidad, mientras que el tipo B tendrá 2 discos duros y su unidad de memoria será de alta capacidad. En total cuenta con 40 unidades de memoria de pequeña capacidad y 30 unidades de memoria de alta capacidad y 80 discos duros. Por cada ordenador del tipo A espera obtener un beneficio de 150 euros y del tipo B de 250 euros.

a) ¿Cuál es la mejor decisión sobre el número de ordenadores a montar de cada tipo?

b) Con esta producción, ¿habría algún excedente en el material mencionado?

----

a)

Sean x e y el número de ordenadores de los tipos A y B que monta la empresa informática, respectivamente.

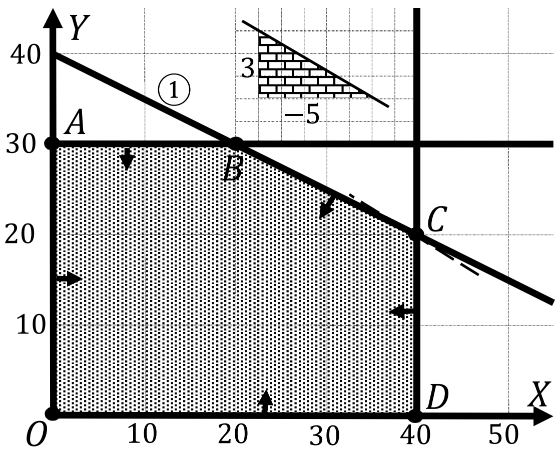
Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} x+2y\leq 80 \\ x\leq 40;\ y\leq 30 \end{array}\right\}$.

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y)=150x+250y$.

① $\Rightarrow x+2y\leq 80 \Rightarrow y\leq \frac{80-x}{2} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	20
y	40	30

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.



Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=30 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,30).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=30 \\ x+2y=80 \end{array}\right\} \Rightarrow x+60=80 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=20 \Rightarrow B(20,30).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=80 \\ x=40 \end{array}\right\} \Rightarrow 40+2y=80;\ \ 2y=40;\ \ y=20 \Rightarrow C(40,20).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=40 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow D(40,0).$

Los valores de la función de objetivos $f(x,y)=150x+250y$ en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,30) = 150 \cdot 0 + 250 \cdot 30 = 0 + 7.500 = 7.500.$

$B \Rightarrow f(20,30) = 150 \cdot 20 + 250 \cdot 30 = 3.000 + 7.500 = 10.500.$

$C \Rightarrow f(40,20) = 150 \cdot 40 + 250 \cdot 20 = 6.000 + 5.000 = 11.000.$

$D \Rightarrow f(40,0) = 150 \cdot 40 + 250 \cdot 0 = 6.000 + 0 = 6.000.$

El máximo se produce en el punto $C(40,20)$.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 150x + 250y = 0 \Rightarrow y = -\frac{150}{250}x = -\frac{3}{5}x \Rightarrow m = -\frac{3}{5}.$

$\underline{Máximo\ beneficio: montando\ 40\ ordenadores\ tipo\ A\ y\ 20\ tipo\ B.}$

$b)$

Las necesidades y excedencias se expresan en la tabla siguiente.

	Discos duros	Memoria (pc)	Memoria (ac)
40 tipo A	40	40	0
20 tipo B	40	0	20
Total	80	40	20
Disposición	80	40	30
Excedencias	0	0	10

$\underline{Únicamente\ sobran\ 10\ memorias\ de\ alta\ capacidad.}$

****

2º) Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = \frac{Lx}{x^2}.$ $\qquad$ $b)\ f(x) = x \cdot e^{2x}.$

$a)$

$$f(x) = \frac{Lx}{x^2}.$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - Lx \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{x - 2x \cdot Lx}{x^4} = \underline{\frac{1 - 2 \cdot Lx}{x^3}}.$$

$b)$

$$f(x) = x \cdot e^{2x}.$$

$$f'(x) = 1 \cdot e^{2x} + x \cdot 2 \cdot e^{2x} = \underline{e^{2x} \cdot (1 + 2x)}.$$

****

3º) Dada la función $f(x) = 2 \cdot e^{x+1}$.

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la función en el punto $x = 1$.

b) Calcular el área de la región del plano limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

----

a)

El punto de tangencia es el siguiente:

$f(1) = 2 \cdot e^{1+1} = 2e^2 \Rightarrow P(1, 2e^2)$.

El valor de la pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$f'(x) = 2 \cdot e^{x+1} \Rightarrow m = f'(1) = 2 \cdot e^{1+1} = 2e^2$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(1, 2e^2)$ con $m = 2e^2$ es:

$y - 2e^2 = 2e^2(x - 1) = 2e^2x - 2e^2$.

$$\underline{La\ recta\ tangente\ pedida\ es\ t \equiv 2e^2x - y = 0}.$$

b)

En el intervalo $(0, 1)$ todas las ordenadas de la función $f(x) = 2 \cdot e^{x+1}$ son positivas, por lo cual, la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_0^1 2 \cdot e^{x+1} \cdot dx = 2 \cdot \int_0^1 e^{x+1} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x + 1 = t \\ dx = dt \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x = 1 \to t = 2 \\ x = 0 \to t = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = 2 \cdot \int_1^2 e^t \cdot dt = 2 \cdot [e^t]_1^2 = 2 \cdot (e^2 - e^1) = 2e \cdot (e - 1).$$

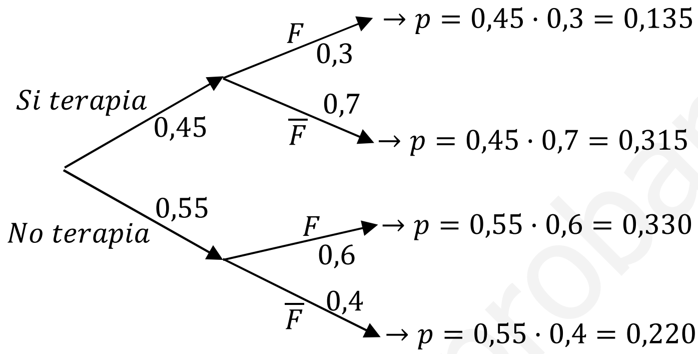
$$\underline{S = 2e \cdot (e - 1)\ u^2 \cong 9{,}34\ u^2}.$$

****

4º) En un hospital de la región de Murcia se está probando una nueva terapia para dejar de fumar. De los pacientes que entran en este ensayo el 45 % prueba la terapia y el resto no. Después de un año el 70 % de los que siguieron la terapia y el 40 % de los que no la siguieron han dejado de fumar. Se elige al azar a un paciente fumador de este hospital:

a) Calcule la probabilidad de que después de un año haya dejado de fumar.

b) Se transcurrido un año el paciente sigue fumando, calcule la probabilidad de que haya seguido la nueva terapia.



a)

$$P = P(\overline{F}) = P(Si \cap \overline{F}) + P(No \cap \overline{F}) =$$

$$= P(Si) \cdot P(\overline{F}/Si) + P(No) \cdot P(\overline{F}/No) = 0{,}45 \cdot 0{,}7 + 0{,}55 \cdot 0{,}4 =$$

$$= 0{,}315 + 0{,}220 = \underline{0{,}535}.$$

c)

$$P = P(Si/F) = \frac{P(Si \cap F)}{P(F)} = \frac{P(Si) \cdot P(F/Si)}{1 - P(\overline{F})} = \frac{0{,}45 \cdot 0{,}3}{1 - 0{,}535} = \frac{0{,}135}{0{,}465} = \underline{0{,}2903}.$$

****

5º) En un estudio realizado por una empresa se ha obtenido que el intervalo de confianza de una variable, a un nivel de confianza del 95 %, es $(6{,}824; 9{,}176)$. Hallar la media y el tamaño de la muestra para obtener dicho intervalo conociendo que la varianza de la distribución es de 9. Explique cada uno de los pasos realizados.

$$\overline{x} = \frac{9{,}176+6{,}824}{2} = \frac{16{,}000}{2} = \underline{8}.$$

$$E = \frac{9{,}176-6{,}824}{2} = \frac{2{,}352}{2} = 1{,}176.$$

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1-\alpha = 0{,}95 \ \rightarrow \ \alpha = 1-0{,}95 = 0{,}05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$$
$$(1-0{,}025 = 0{,}9750 \ \rightarrow z = 1{,}96).$$

Datos: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{9} = 3$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$; $E = 1{,}176$.

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow \ \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \ \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1{,}96 \cdot \frac{3}{1{,}176}\right)^2 =$

$= (1{,}96 \cdot 2{,}5510)^2 = 5^2 = 25.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 25.}$

****