PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

JUNIO – 2021

(Resueltos por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OVSERVACIONES IMPORTANTES: Debes responder a un máximo de 4 preguntas. Si se responde a más de 4 preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras que haya respondido el estudiante. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1º) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} x+3y+z=5 \\ ax+2z=0 \\ ay-z=a \end{array}\right\}$ en función de los valores del parámetro a. Resolverlo para $a=1$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ a & 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & -1 & a \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix}=a^2-2a+3a=0;\ \ a^2+a=0;\ \ a(a+1)=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow a_1=0, a_2=-1.$

$$\underline{Para \left\{\begin{array}{l} a\neq 0 \\ a\neq -1 \end{array}\right\} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a=0 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$$Para\ a=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 5-3=2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ a=-1 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

Para $a=1$ el sistema resulta: $\left.\begin{array}{r} x+3y+z=5 \\ x+2z=0 \\ y-z=1 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{1\cdot(1+1)}=\frac{6-10}{2}=\frac{-4}{2}=-2. \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{2}=\frac{1-2+5}{2}=\frac{4}{2}=2.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2}=\frac{5-3}{2}=\frac{2}{2}=1.$$

$$\underline{Solución: x=-2,\ y=2,\ z=1.}$$

****

2º) En un terreno en la huerta de Beniel se quieren plantar dos tipos distintos de naranjos: A y B. No se puede cultivar más de 8 hectáreas con naranjos de tipo A ni más de 10 hectáreas con naranjos de tipo B. Cada hectárea de naranjos de tipo A necesita 4 m^3 de agua anuales y cada una de tipo B, 3 m^3. Se dispone anualmente de 45 m^3 de agua. Cada hectárea de tipo A requiere una inversión de 500 euros y cada una de tipo B, 225 euros. Se dispone de 4.575 euros para realizar dicha inversión. Si cada hectárea de naranjos de tipo A y B producen, respectivamente, 500 y 300 kilos anuales de naranjas:

a) Calcular las hectáreas de cada tipo de naranjo que se debe plantar para maximizar la producción de naranjas. Razone la respuesta.

b) Obtener la producción máxima.

Sean x e y el número de hectáreas de naranjos de los tipos A y B que se plantan en la huerta de Beniel, respectivamente.

Las restricciones son: $\left.\begin{array}{r} x \leq 8;\ \ y \leq 10 \\ 4x + 3y \leq 45 \\ 500x + 225y \leq 4.575 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} x \leq 8;\ \ y \leq 10 \\ 4x + 3y \leq 45 \\ 20x + 9y \leq 183 \end{array}\right\}.$

① $\Rightarrow 4x + 3y \leq 45 \Rightarrow y \leq \frac{45-4x}{3} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	6	9
y	7	3

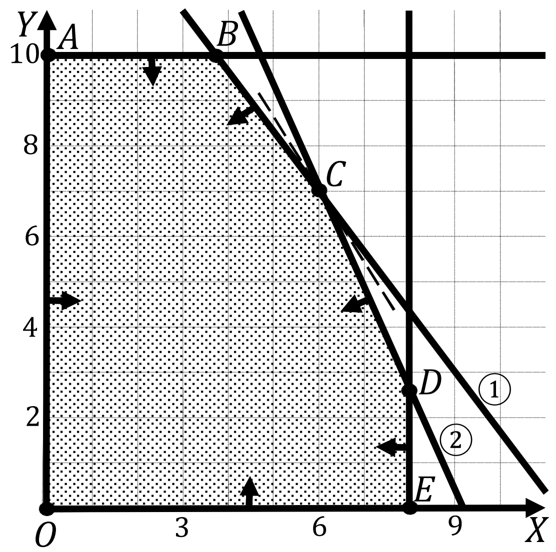
② $\Rightarrow 20x + 9y \leq 183 \Rightarrow y \leq \frac{183-20x}{9} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

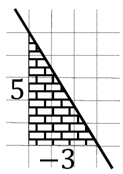
x	6	9
y	7	1/3

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ y = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,10).$





$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 10 \\ 4x + 3y = 45 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x + 30 = 45;\ \ 4x = 15;$

$x = 15/4 \Rightarrow B(15/4, 10).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x + 3y = 45 \\ 20x + 9y = 183 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{r} -12x - 9y = -135 \\ 20x + 9y = 183 \end{array}\right\} \Rightarrow 8x = 48 \Rightarrow x = 6;\ \ 24 + 3y = 45;\ \ y = 7 \Rightarrow C(6,7).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 8 \\ 20x + 9y = 183 \end{array}\right\} \Rightarrow 160 + 9y = 183;\ 9y = 23 \Rightarrow D(8, 23/9).$

$E \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 8 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow E(8, 0).$

La función de objetivos es $f(x, y) = 500x + 300y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 10) = 500 \cdot 0 + 300 \cdot 10 = 0 + 3.000 = 3.000.$

$B \Rightarrow f(15/4, 10) = 500 \cdot \frac{15}{4} + 300 \cdot 10 = 1.875 + 3.000 = 4.875.$

$C \Rightarrow f(6, 7) = 500 \cdot 6 + 300 \cdot 7 = 3.000 + 2.100 = 5.100.$

$D \Rightarrow f(8, 23/9) = 500 \cdot 8 + 300 \cdot \frac{23}{9} = 4.000 + 766{,}67 = 4.766{,}67.$

$E \Rightarrow f(8, 0) = 500 \cdot 8 + 300 \cdot 0 = 4.000 + 0 = 4.000.$

El valor máximo se produce en el punto $C(6, 7)$.

También se hubiera obtenido el punto $C(6, 7)$ por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 500x + 300y = 0 \Rightarrow y = -\frac{500}{300}x = -\frac{5}{3}x \Rightarrow m = -\frac{5}{3}.$

$\underline{Se\ obtiene\ el\ máximo\ beneficio\ plantando\ 6\ hectáreas\ de\ A\ y\ 7\ de\ B.}$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ es\ de\ 5.100\ euros.}$

****

3º) El coste de producción de x unidades de un determinado producto viene dado por la función $C(x) = \frac{1}{4}x^2 + 35x + 25$ y su precio de venta es: $p = 50 - \frac{x}{4}$ euros. Hallar:

a) El número de unidades que debe venderse diariamente para que el beneficio sea máximo.

b) El precio al que deben venderse las unidades obtenidas en el apartado a).

c) El beneficio máximo.

----

a)

El beneficio es la diferencia entre el precio de venta y el precio de coste.

Por la venta de x unidades se obtiene multiplicando x por el precio de venta de cada producto:

$$V(x) = p \cdot x = \left(50 - \frac{x}{4}\right) \cdot x = 50x - \frac{1}{4}x^2.$$

$$B(x) = V(x) - C(x) = 50x - \frac{1}{4}x^2 - \left(\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25\right) =$$

$$= 50x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^2 - 35x - 25 \Rightarrow B(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 15x - 25.$$

El beneficio es máximo cuando se anula su primera derivada y es positiva la segunda derivada para los valores que anulan la primera:

$$B'(x) = -x^2 + 15x. \qquad B''(x) = -2x + 15.$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 15x = 0;\ -x(x - 15) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 15.$$

$$B'(x) = -x^2 + 15x.$$

$$B''(0) = 15 > 0 \Rightarrow Mínimo.$$

$$B''(15) = -2 \cdot 15 + 15 = -15 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 15.$$

$$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ vendiendo\ 15\ unidades\ diarias.}$$

b)

$$p(15) = 50 - \frac{15}{4} = 50 - 3{,}75 = 46{,}25.$$

$$\underline{El\ producto\ debe\ venderse\ a\ 46{,}25\ euros\ la\ unidad.}$$

$c)$

$$B(15) = -\frac{1}{2} \cdot 15^2 + 15 \cdot 15 - 25 = \frac{-225+450-50}{2} = \frac{175}{2} = 87{,}5.$$

$$\underline{El\ beneficio\ diario\ es\ de\ 87{,}5\ euros}.$$

****

4º) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, calcular el valor de $a, b\ y\ c$ para que:

$a)$ La función pase por el origen de coordenadas y tenga en el punto $P(1, -1)$ un mínimo local.

$b)$ Para los valores obtenidos en el apartado anterior, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

$a)$

Por pasar por el origen de coordenadas: $f(0) = 0 \Rightarrow \underline{c = 0}$.

Por contener al punto $P(1, -1) \Rightarrow f(1) = -1$:

$f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1 = -1;\ a + b = -1.$ (1)

Por tener un extremo relativo en $P(1, -1) \Rightarrow f'(1) = 0$:

$f'(x) = 3ax^2 + b.$

$f'(1) = 3a \cdot 1^2 + b = 0;\ \ 3a + b = 0.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} a + b = -1 \\ 3a + b = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -a - b = 1 \\ 3a + b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow \underline{a = \tfrac{1}{2}}.$$

$\frac{1}{2} + b = -1;\ 1 + 2b = -2;\ \ 2b = -3 \Rightarrow \underline{b = -\frac{3}{2}}.$

$b)$

Para $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}\ y\ c = 0$ la función es $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}(x^2 - 1).$ $\qquad f''(x) = 3x.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}(x^2 - 1) = 0;\ x^2 - 1 = 0;\ \ x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$

$f''(-1) = -3 < 0 \Rightarrow Decreciente.$ $\qquad f''(1) = 3 > 0 \Rightarrow Creciente.$

Teniendo en cuanta que $D(f) \Rightarrow R$, las raíces de la primera derivada dividen la recta real en los intervalos $(-\infty, -1), (-1, 1)\ y\ (1, +\infty)$, donde la función es, alternativamente, creciente o decreciente.

Considerando, por ejemplo, que para $x = 0 \in (-1, 1)$ es $f'(0) = -\frac{3}{2} < 0$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

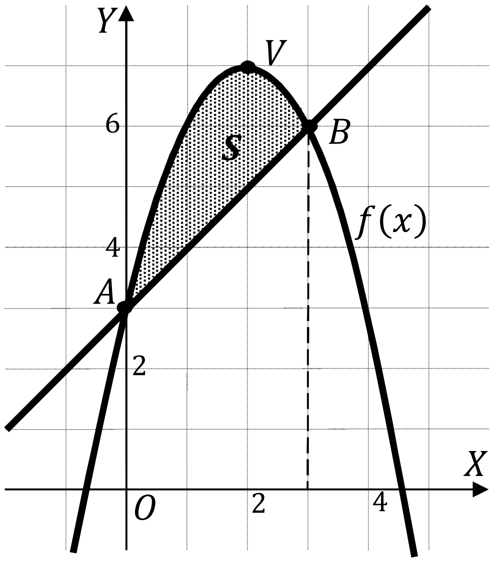
$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-1, 1)}.$$

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)}.$$

****

5º) Representar gráficamente el recinto plano limitado por la parábola $f(x) = -x^2 + 4x + 3$ y la recta $g(x) = 3 + x$. Calcular su área.

La función $f(x) = -x^2 + 4x + 3$ es una parábola cóncava ($\cap$) por ser negativo el coeficiente de x^2, cuyo vértice es el siguiente:



$f'(x) = -2x + 4 = 0 \rightarrow x = 2.$

$f(2) = -4 + 8 + 3 = 7 \Rightarrow V(2, 7).$

Los puntos de corte de la parábola y la recta se obtienen de la igualación de sus expresiones:

$-x^2 + 4x + 3 = 3 + x;\ x^2 - 3x = 0;$

$x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow A(0, 3) \\ x_2 = 3 \rightarrow B(3, 6) \end{cases}.$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que se indica en la figura adjunta.

$$S = \int_0^3 [f(x) - x] \cdot dx = \int_0^3 [-x^2 + 4x + 3 - (3 + x)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^3 (-x^2 + 4x + 3 - 3 - x) \cdot dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^3 =$$

$$= \left(-\frac{3^3}{3} + \frac{3 \cdot 3^2}{2}\right) - 0 = -9 + \frac{27}{2} = \frac{-18+27}{2} \Rightarrow \underline{S = \frac{9}{2}\ u^2 = 4{,}5\ u^2}.$$

****

6º) Dada la función $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$:

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $x = 0$.

b) Calcular $I = \int \frac{2x}{x^2+1} \cdot dx$.

c) Calcular $I = \int_1^2 \frac{2x}{x^2+1} \cdot dx$.

----

a)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$$f'(x) = \frac{2\cdot(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}.$$

$$m = f'(0) = \frac{2-0}{(0+1)^2} = 2.$$

El punto de tangencia es el siguiente: $f(0) = \frac{0}{0^2+1} = 0 \Rightarrow O(0,0)$.

La ecuación de una recta conocidos un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$:

$$y - 0 = 2(x - 0) = 2x \Rightarrow Recta\ tangente: \underline{t \equiv 2x - y = 0}.$$

b)

$$I = \int \frac{2x}{x^2+1} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x^2+1 = 2 \\ 2x \cdot dx = dt \end{matrix} \right\} \Rightarrow \int \frac{1}{t} \cdot dt = Lt + C \Rightarrow \underline{I = L(x^2+1) + C}.$$

c)

Teniendo en cuanta el apartado anterior:

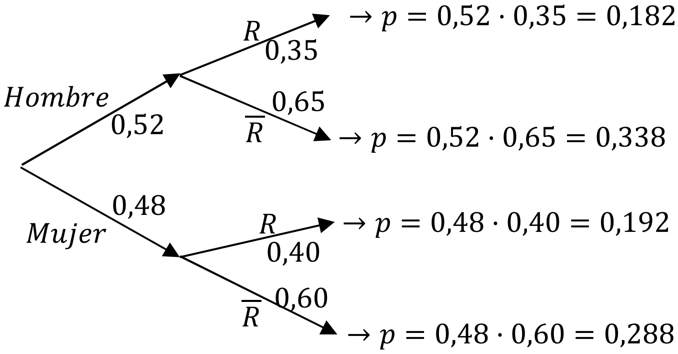
$$I = \int_1^2 \frac{2x}{x^2+1} \cdot dx = \left[L(x^2+1)\right]_1^2 = L(2^2+1) - L(1^2+1) \Rightarrow \underline{I = L5 - L2}.$$

****

7º) En un viaje de estudios el 52 % de los jóvenes son hombres. De ellos el 35 % son rubios, así como el 40 % de las mujeres. Si elegimos a un estudiante al azar:

a) Calcule la probabilidad de que ser rubio.

b) Sabiendo que NO es rubio, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?



a)

$$P = P(R) = P(H \cap R) + P(M \cap R) = P(H) \cdot P(R/H) + P(M) \cdot P(R/M) =$$

$$= 0{,}52 \cdot 0{,}35 + 0{,}48 \cdot 0{,}40 = 0{,}182 + 0{,}192 = \underline{0{,}374}.$$

c)

$$P = P\left(M/\overline{R}\right) = \frac{P\left(M \cap \overline{R}\right)}{P\left(\overline{R}\right)} = \frac{P(M) \cdot P\left(\overline{R}/M\right)}{1 - P(R)} = \frac{0{,}48 \cdot 0{,}60}{1 - 0{,}374} = \frac{0{,}288}{0{,}626} = \underline{0{,}4601}.$$

****

8º) Alex y Fran son dos amigos que practican asiduamente en las pistas el baloncesto. La probabilidad de que Alex enceste un tiro libre es del 65 % y de que lo haga Fran es del 48 %. Dado que los dos sucesos son independientes, calcule la probabilidad de los siguientes sucesos al lanzar un tiro libre:

a) Ambos encesten un tiro libre.

b) Sólo Alex enceste la pelota.

c) Al menos uno de ellos enceste la pelota.

$$Datos: P(A) = 0{,}65;\ \ P(F) = 0{,}48;\ \ P(A \cap F) = P(A) \cdot P(F).$$

a)

$$P = P(A \cap F) = P(A) \cdot P(F) = 0{,}65 \cdot 0{,}48 = \underline{0{,}312}.$$

b)

$$P = P(A) \cdot P\left(\overline{F}\right) = 0{,}65 \cdot (1 - 0{,}48) = 0{,}65 \cdot 0{,}52 = \underline{0{,}338}.$$

c)

$$P = 1 - P\left(\overline{A} \cap \overline{F}\right) = 1 - 0{,}35 \cdot 0{,}52 = 1 - 182 = \underline{0{,}818}.$$

****