PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

EXTRAORDINARIA – 2022

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OVSERVACIONES IMPORTANTES: Debes responder a un máximo de 4 preguntas. Si se responde a más de 4 preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras que haya respondido el estudiante. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular el valor de a para que $B^2 = A$.

b) Calcular la matriz inversa A^{-1}.

c) Para $a = 0$, encuentre la matriz X que satisface la ecuación $AX + B = C$.

----

a)

$$B^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}; \ \begin{pmatrix} 9 + a^2 & 3a + a \\ 3a + a & a^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 9 + a^2 & 4a \\ 4a & a^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} 9 + a^2 = 10 \\ 4a = 4 \\ a^2 + 1 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{a = 1}.$$

b)

$$|A| = \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 20 - 16 = 4; \ A^t = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}; \ Adj. de\ A^t = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj. de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}}{4} \Rightarrow \underline{A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}}.$$

c)

$$A \cdot X + B = C; \ A \cdot X = C - B; \ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B);$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B) \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot (C - B)}.$$

Para $a = 0$ es $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$X = A^{-1} \cdot (C - B) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 3 & 18 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) Sea S la región del plano delimitado por el siguiente sistema de inecuaciones lineales: $\left.\begin{array}{r} x+y\le 10 \\ x+2y\ge 8 \\ 2\le y\le x+6 \\ x\le 6 \end{array}\right\}$.

a) Represente la región S y calcule sus vértices.

b) Determine el punto de la región factible donde la función $f(x,y)=-x+2y$ alcanza su valor mínimo. Calcule dicho valor.

----

a)

$$\left.\begin{array}{r} x+y\le 10 \\ x+2y\ge 8 \\ 2\le y\le x+6 \\ x\le 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y\le 10 \\ x+2y\ge 8 \\ y\le x+6 \\ x\le 6;\ \ y\ge 2 \end{array}\right\}.$$

$① \Rightarrow x+y\le 10 \Rightarrow y\le 10-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	5	3
y	5	7

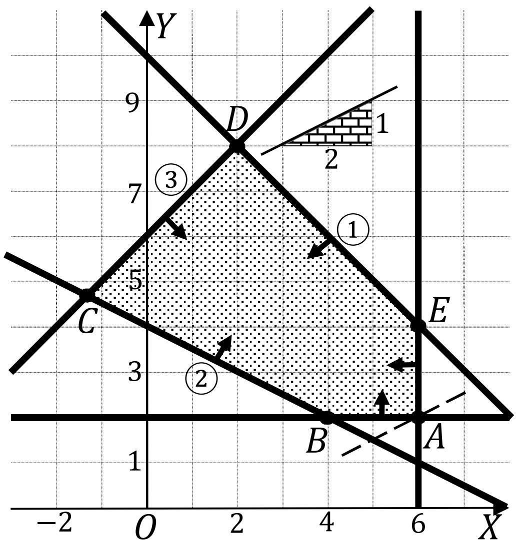
$② \Rightarrow x+2y\ge 8;\ \ y\ge \frac{8-x}{2} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow No.$

x	0	4
y	4	2

$③ \Rightarrow y\le x+6 \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	4
y	4	2

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.



Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=6 \\ y=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A(6,2)}.$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=8 \\ x+2y=8 \end{array}\right\} \Rightarrow x=4 \Rightarrow \underline{B(4,2)}.$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=8 \\ x-y=-6 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+2y=8 \\ -x+y=6 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$3y=14;\ \ y=\frac{14}{3};\ \ x+\frac{28}{3}=8;\ \ 3x+28=24;\ \ 3x=-4;\ \ x=-\frac{4}{3} \Rightarrow \underline{C\left(-\frac{4}{3},\frac{14}{3}\right)}.$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=10 \\ x-y=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x=4;\ \ x=2;\ \ y=8 \Rightarrow \underline{D(2,8)}.$

$E \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=6 \\ x+y=10 \end{array}\right\} \Rightarrow y=4 \Rightarrow \underline{E(6,4)}.$

$b)$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y) = -x + 2y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(6,2) = -6 + 2 \cdot 2 = -6 + 4 = -2.$

$B \Rightarrow f(4,2) = -4 + 2 \cdot 2 = -4 + 4 = 0.$

$C \Rightarrow f\left(-\frac{4}{3}, \frac{14}{3}\right) = -\frac{4}{3} + 2 \cdot \frac{14}{3} = -\frac{4}{3} + \frac{28}{3} = 8.$

$D \Rightarrow f(2,8) = -2 + 2 \cdot 8 = -2 + 16 = 14.$

$E \Rightarrow f(6,4) = -6 + 2 \cdot 4 = -6 + 8 = 2.$

El máximo se produce en el punto $A(6,2)$.

También se hubiera obtenido el punto A por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = -x + 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x \Rightarrow m = \frac{1}{2}.$

$\underline{El\ mínimo\ se\ obtiene\ en\ el\ punto\ A(6,2)\ y\ su\ valor\ es -2.}$

****

3º) La ecuación de demanda de un determinado producto viene dado por la expresión $p = 400 - 2q$, y su función de coste total es $C(q) = 0{,}2q^2 + 4q + 400$, donde q es número de unidades de dicho producto y p se expresa en euros por unidad. Determine:

a) La expresión de la función de beneficios de la empresa.

b) El nivel de producción, q, para el que se maximiza la función de beneficios de la empresa.

c) El precio para el que el beneficio es máximo.

d) El beneficio máximo.

----

a)

La función beneficios, $B(q)$, es la diferencia entre la función ingresos, $I(q)$, menos la función costes.

$$I(q) = q \cdot p = q \cdot (400 - 2q) = 400q - 2q^2.$$

$$B(q) = I(q) - C(q) = 400q - 2q^2 - (0{,}2q^2 + 4q + 400) =$$

$$= -2q^2 + 400q - 0{,}2q^2 - 4q - 400 \Rightarrow \underline{B(q) = -2{,}2q^2 + 396q}.$$

b)

La función beneficios es una parábola cóncava (∩), por ser negativo el coeficiente de q^2, por lo cual, su mínimo absoluto es su vértice, que es el siguiente:

$$B'(q) = -4{,}4q + 396.$$

$$B'(q) = 0 \Rightarrow -4{,}4q + 396 = 0; \;\; q = \frac{396}{4{,}4} = 90.$$

$$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ cuando\ se\ producen\ 90\ unidades\ del\ producto}.$$

c)

$$p = 400 - 2q = 400 - 2 \cdot 90 = 400 - 180 = 220.$$

$$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ cuando\ la\ unidad\ del\ producto\ vale\ 220\ euros}.$$

d)

$$B(110) = -2{,}2 \cdot 90^2 + 396 \cdot 90 = -17.820 + 35.640 = 17.820.$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 17.820\ euros}.$$

****

4º) Sea la función $f(x)=\begin{cases} x \cdot e^x \ \ si \ \ x \leq 0 \\ ax+b \ \ si \ \ 0<x<1 \\ 1+x \cdot Lx \ \ si \ \ x \geq 1 \end{cases}$:

a) Calcular el valor de los parámetros $a \ y \ b$ para que la función sea continua en todo su dominio.

b) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=1$.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=0$ y para $x=1$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de $a \ y \ b$ para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para \ x=0 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0}(x \cdot e^x) = 0 = f(0) \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0}(ax+b) = b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow \underline{b=0}.$$

La función resulta: $f(x)=\begin{cases} x \cdot e^x \ \ si \ \ x \leq 0 \\ ax \ \ si \ \ 0<x<1 \\ 1+x \cdot Lx \ \ si \ \ x \geq 1 \end{cases}$.

$$Para \ x=1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1}(ax) = a \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1}(1+x \cdot Lx) = 1 = f(1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow \underline{a=1}.$$

b)

Para $x=1$ la función resulta $f(x)=1+x \cdot Lx$.

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = 0 + 1 \cdot Lx + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + Lx.$$

$$Para \ x=1 \Rightarrow m = f'(1) = 1 + L1 = 1 + 0 \Rightarrow m = 1.$$

El punto de tangencia es el siguiente: $f(1) = 1 + L1 = 1 + 0 = 1 \Rightarrow P(1, 1)$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(1, 1)$:

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 1) = x - 1.$$

$$\underline{La\ recta\ tangente\ es\ t \equiv x - y = 0}.$$

****

5º) Dada la función $f(x)=\frac{1-x^2}{x^2-4}$, calcule:

$a)$ El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes coordenados.

$b)$ Las asíntotas verticales y horizontales, si las hay.

$c)$ Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$c)$ Máximos y mínimos relativos.

$a)$

El dominio de una función racional es el conjunto de números reales, excepto los valores que anulan el denominador.

$$x^2-4=0 \Rightarrow x_1=-2, x_2=2.$$

$$\underline{D(f) \Rightarrow R-\{-2,2\}}.$$

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow \frac{1-x^2}{x^2-4}=0;\ \ 1-x^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \rightarrow A(-1,0) \\ x_2=1 \rightarrow B(1,0) \end{cases}.$$

$$Eje\ Y \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{1-0^2}{0^2-4}=\frac{1}{-4} \Rightarrow C\left(0,-\frac{1}{4}\right).$$

$b)$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y=k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^2}{x^2-4}=-1 \Rightarrow \underline{La\ recta\ y=-1\ es\ asíntota\ horizontal.}$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{Las\ rectas\ x=-2\ y\ x=2\ son\ asíntotas\ verticales.}$$

$c)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{-2x\cdot(x^2-4)-(1-x^2)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{-2x^3+8x-2x+2x^3}{(x^2-4)^2}=\frac{6x}{(x^2-4)^2}.$$

Teniendo en cuanta que el denominador de la derivada es positivo para los valores del dominio de la función, el valor de la derivada es el que tenga su numerador.

Teniendo en cuenta lo anterior y el dominio de la función, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0)}.$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in (0, 2) \cup (2, +\infty)}.$$

d)

De los periodos de crecimiento y decrecimiento se deduce que la función tiene un mínimo relativo para $x = 0$; no obstante se hace el estudio por derivadas.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{6\cdot(x^2-4)^2 - 6x\cdot[2\cdot(x^2-4)\cdot 2x]}{(x^2-4)^4} = \frac{6\cdot(x^2-4) - 24x^2}{(x^2-4)^3} = \frac{6x^2-24-24x^2}{(x^2-4)^3} = \frac{-18x^2-24}{(x^2-4)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{-6(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}.$$

$$f''(0) = \frac{-6(3\cdot 0^2+4)}{(0^2-4)^3} = \frac{-24}{-64} > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = -\frac{1}{4} \Rightarrow \underline{Mínimo: C\left(0, -\frac{1}{4}\right)}.$$

****

6º) Dada la función $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$:

$a)$ Calcular la derivada $f'(x)$.

$b)$ Calcular $I=\int f(x)\cdot dx$.

$c)$ Calcular $I=\int_0^1 f(x)\cdot dx$.

$a)$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}\Rightarrow \underline{f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}.$$

$b)$

$$I=\int f(x)\cdot dx=\int\frac{x}{1+x^2}\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}1+x^2=t\\ x\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot dt\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{t}\cdot dt=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot L|t|+C\Rightarrow \underline{I=\int\frac{x}{1+x^2}\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot L(1+x^2)+C}.$$

$c)$

$$I=\int_0^1 f(x)\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot\left[L(1+x^2)\right]_0^1=\frac{1}{2}\cdot\left[L(1+1^2)-L(1+0^2)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(L2-L1)=\frac{1}{2}\cdot(L2-0)\Rightarrow \underline{I=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\cdot dx\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot L2}.$$

****

7º) Dada la función $f(x) = 4x - x^2$:

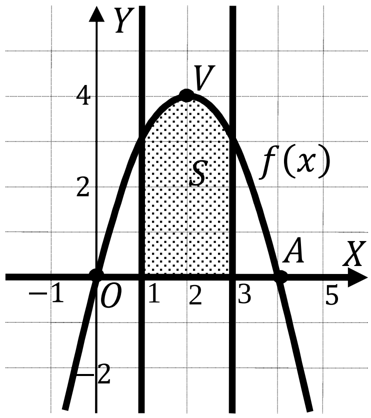
a) Representar gráficamente el recinto limitado por la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

b) Calcular el área del recinto del apartado anterior.

----

a)

La parábola $f(x) = 4x - x^2$ es cóncava ($\cap$), por ser negativo el coeficiente de x^2, tiene su vértice en el punto siguiente:



$$f'(x) = 4 - 2x = 0; \;\; 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2.$$

$$f(2) = 4 \cdot 2 - 2^2 = 8 - 4 = 4 \Rightarrow V(2,4).$$

Los puntos de corte de parábola con el eje de abscisas son los siguientes: $f(x) = 0 \Rightarrow 4x - x^2 = 0; \;\; x(4 - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow O(0,0) \\ x_2 = 4 \rightarrow A(4,0) \end{cases}.$

La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.

b)

$$S = \int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 (4x - x^2) \cdot dx = \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^3 =$$

$$= \left(2 \cdot 3^2 - \frac{3^3}{3}\right) - \left(2 \cdot 1^2 - \frac{1^3}{3}\right) = 18 - 9 - 2 + \frac{1}{3} = 7 + \frac{1}{3} \Rightarrow \underline{S = \frac{22}{3}\, u^2 \cong 7{,}33\, u^2}.$$

****

8º) a) Sean A y B dos sucesos independientes, tales que $P(A) = 0,3\ y\ P(A \cap B) = 0,12$.

I) Calcular $P(B)$. II) Calcular $P(A \cup B)$. III) Calcular $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

b) En una estación del AVE, el tiempo que tarda un viajero para acceder al tres desde que llega al control de equipajes sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 2 minutos. Se tomó una muestra de 50 viajeros, y se observó que el tiempo medio de espera era de 16 minutos. Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de espera de la maleta en ese aeropuerto con un nivel de confianza del 90 %.

----

a)

Dos sucesos A y B son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$P(A) = 0,3\ y\ P(A \cap B) = 0,12$.

I)

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,12}{0,3} \Rightarrow \underline{P(B) = 0,4}.$$

II)

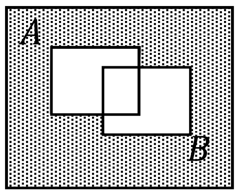
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,4 - 0,12 = 0,7 - 0,12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{P(A \cup B) = 0,58}.$$

III)

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,58 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,42}.$$



$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B)$

b)

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$$1 - \alpha = 0,90 \ \rightarrow\ \alpha = 1 - 0,90 = 0,10 \ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,645.$$

$$(1 - 0,05 = 0,9500 \ \rightarrow z = 1,645).$$

Datos: $n = 50;\ \ \overline{x} = 16;\ \ \sigma = 2;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(16 - 1,645 \cdot \frac{2}{\sqrt{50}};\ 16 + 1,645 \cdot \frac{2}{\sqrt{50}}\right);$$

$$(16 - 1{,}645 \cdot 0{,}2828;\ 16 + 1{,}645 \cdot 0{,}2828);\ \ (16 - 0{,}4653;\ 16 + 0{,}4653).$$

$$\underline{I.C._{90\,\%} = (15{,}5347;\ 16{,}4653).}$$

****