PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

JUNIO – 2022

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OVSERVACIONES IMPORTANTES: Debes responder a un máximo de 4 preguntas. Si se responde a más de 4 preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras que haya respondido el estudiante. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1º) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} 4x+ay-2z=1 \\ ax-2y+2z=-1 \\ ax+y=0 \end{array}\right\}$ en función de los valores del parámetro a. Resolverlo para $a=1$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M=\begin{pmatrix} 4 & a & -2 \\ a & -2 & 2 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} 4 & a & -2 & 1 \\ a & -2 & 2 & -1 \\ a & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$|M|=\begin{vmatrix} 4 & a & -2 \\ a & -2 & 2 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix}=-2a+2a^2-4a-8=0;\ \ 2a^2-6a-8=0;$

$a^2-3a-4=0;\ \ a=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{3\pm 5}{2}\Rightarrow a_1=-1, a_2=4.$

$\underline{Para\ \left\{\begin{array}{c} a\neq -1 \\ a\neq 4 \end{array}\right\}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg.\Rightarrow S.C.D.}$

$M'=\begin{pmatrix} 4 & a & -2 & 1 \\ a & -2 & 2 & -1 \\ a & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow \{C_3=-2C_4, \forall a\in R\}.$

$\underline{Para\ \left\{\begin{array}{c} a=-1 \\ a=4 \end{array}\right\}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg.\Rightarrow S.C.I.}$

Para $a = 1$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} 4x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + 2z = -1 \\ x + y = 0 \end{array}\right\}$ que es compatible determinado; resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{2-2}{-2+2-4-8} = \frac{0}{-12} = 0. \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{2-2}{-12} = \frac{0}{-12} = 0.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{1-1+2+4}{-12} = \frac{6}{-12} = -\frac{1}{2}.$$

$$\underline{Solución: x = 0,\ y = 0,\ z = -\frac{1}{2}.}$$

****

2º) La empresa Sportwear, especializada en ropa deportiva, quiere fabricar dos tipos de camisetas: técnicas y casual. Para ello utiliza tejidos sostenibles con el medio ambiente: algodón orgánico y lino. Para fabricar una camiseta técnica necesita 70 g de algodón orgánico y 20 g de lino, y para fabricar una camiseta casual necesita 60 g de algodón orgánico y 10 g de lino. Actualmente, la empresa dispone para producir 4.200 g de algodón orgánico y 800 g de lino. Además, para que sea rentable el proceso se debe fabricar al menos 10 camisetas tipo casual. Sabiendo que cada camiseta técnica da un beneficio de 5 euros y cada casual de 4 euros, calcule, justificando la respuesta:

a) El número de camisetas de cada tipo que debería fabricar para obtener el máximo beneficio

b) El valor de dicho beneficio máximo.

----

a)

Sean x e y el número de camisetas de los tipos técnicas y casual que se fabrican, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} 70x+60y\le 4.200 \\ 20x+10y\le 800 \\ x\ge 0;\ y\ge 10 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 7x+6y\le 420 \\ 2x+y\le 80 \\ x\ge 0;\ y\ge 10 \end{array}\right\}.$

$① \Rightarrow 7x+6y\le 420 \Rightarrow y\le \frac{420-7x}{6} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

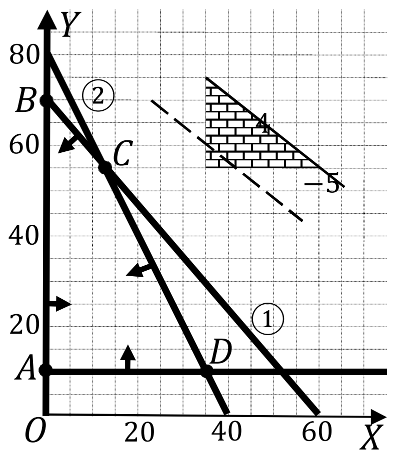
x	0	60
y	70	0

$② \Rightarrow 2x+y\le 80 \Rightarrow y\le 80-2x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	40
y	80	0

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=10 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,10).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ 7x+6y=420 \end{array}\right\} \Rightarrow 6y=420;$

$y=70 \Rightarrow B(0,70).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 7x+6y=420 \\ 2x+y=80 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -7x-6y=-420 \\ 12x+6y=480 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x=60;\ \ x=12;\ \ 24+y=80;\ \ y=56 \Rightarrow C(12,56).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=10 \\ 2x+y=80 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x+10=80;\ \ 2x=70;\ \ x=35 \Rightarrow D(35,10).$

La función de objetivos es $f(x, y) = 5x + 4y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 10) = 5 \cdot 0 + 4 \cdot 10 = 0 + 40 = 40.$

$B \Rightarrow f(0, 70) = 5 \cdot 0 + 4 \cdot 70 = 0 + 280 = 280.$

$C \Rightarrow f(12, 56) = 5 \cdot 12 + 4 \cdot 56 = 60 + 224 = 284.$

$D \Rightarrow f(35, 10) = 5 \cdot 35 + 4 \cdot 10 = 175 + 40 = 215.$

El valor máximo se produce en el punto $C(12, 56)$.

$\underline{Máximo\ beneficio\ fabricando\ 12\ camisetas\ técnicas\ y\ 56\ casual.}$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ es\ de\ 284\ euros.}$

****

3º) Se estima que los beneficios, en miles de euros, obtenidos en una sala de conciertos inaugurada hace 5 años, viene dado por la función $B(t) = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 26$ donde $t \in [0, 5]$ es el tiempo, medido en años, que lleva funcionando la sala. Se quiere conocer:

$a)$ ¿En qué momento se alcanza el máximo beneficio de la sala de conciertos? Razone la respuesta.

$b)$ ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

$a)$

$B(0) = 26.$

$B(5) = 2 \cdot 5^3 - 15 \cdot 5^2 + 24 \cdot 5 + 26 = 250 - 375 + 120 + 26 =$

$= 396 - 375 = 21.$

Para que el beneficio sea máximo o un mínimo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$B'(t) = 6t^2 - 30t + 24.$

$B'(t) = 0 \Rightarrow 6t^2 - 30t + 24 = 0;\ \ t^2 - 5t + 4 = 0;\ \ t = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} =$

$= \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow t_1 = 1;\ \ t_2 = 4.$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera se trata de mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$B''(t) = 12t - 30 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \rightarrow 12 \cdot 1 - 30 = -18 < 0 \Rightarrow Máximo \\ t_2 = 4 \rightarrow 12 \cdot 4 - 30 = 18 > 0 \Rightarrow Mínimo \end{cases}.$$

$\underline{La\ sala\ alcanza\ su\ máximo\ rendimiento\ al\ año\ de\ comenzar\ su\ actividad}.$

$b)$

$B(1) = 2 \cdot 1^3 - 15 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1 + 26 = 2 - 15 + 24 + 26 = 37.$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 37.000\ euros\ anuales}.$

****

4º) Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2-kx+3 & si \ \ x\leq 2 \\ 2x+k & si \ \ x>2 \end{cases}$:

a) Calcular el valor de k para que la función sea continua en $x=2$.

b) Para este valor determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=-1$.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=2$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de k para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=2 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x^2-kx+3)=7-2k=f(2) \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(2x+k)=4+k \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2) \Rightarrow 7-2k=4+k;\ \ 3=3k \Rightarrow \underline{k=1}.$$

b)

Para $k=1$ la función resulta: $f(x)=\begin{cases} x^2-x+3 & si \ \ x\leq 2 \\ 2x+1 & si \ \ x>2 \end{cases}$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-1 & si \ \ x\leq 2 \\ 2 & si \ \ x>2 \end{cases} \Rightarrow m=f'(-1)=2\cdot(-1)-1 \Rightarrow m=-3.$$

El punto de tangencia es el siguiente:

$$f(-1)=(-1)^2-(-1)+3=1+1+3=5 \Rightarrow P(-1,5).$$

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y-y_0=m(x-x_0)$, que aplicada al punto $P(-1,5)$ con $m=-3$ es:

$$y-5=-3\cdot(x+1)=-3x-3.$$

$$\underline{La\ recta\ tangente\ es\ t\equiv 3x+y-2=0}.$$

****

5º) Dada la función $f(x) = x^2 e^x$, calcule:

$a)$ El dominio de la función. $b)$ Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$c)$ Máximos y mínimos relativos.

$d)$ Calcule la derivada de la función $f(x) = x^2 e^x$ en el punto de abscisa $x = 1$.

$a)$

La función f es el producto de un monomio por una función exponencial, por lo cual: $\underline{D(f) \Rightarrow R}$.

$b)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = x \cdot e^x \cdot (2 + x).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x \cdot e^x \cdot (2 + x) = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0.$$

Por ser $D(f) \Rightarrow R$, las raíces de su primera derivada dividen su dominio en tres intervalo donde la función es, alternativamente, en creciente o decreciente.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 1 \in (0, +\infty)$:

$$f'(1) = 1 \cdot e^1 \cdot (2 + 1) = 3e > 0 \Rightarrow Creciente.$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon(-2, 0)}.$$

$c)$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = 1 \cdot e^x \cdot (2 + x) + x \cdot e^x \cdot (2 + x) + x \cdot e^x \cdot 1 =$$

$= e^x[(2+x)+x(2+x)+x] = e^x(2+x+2x+x^2+x) = e^x(x^2+4x+2).$

$f''(-2) = e^{-2}(4-8+2) < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -2.$

$f(-2) = (-2)^2 \cdot e^{-2} = \frac{4}{e^2} \Rightarrow \underline{Máximo: A\left(-2, \frac{4}{e^2}\right)}.$

$f''(0) = e^0(0^2 + 4 \cdot 0 + 2) = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0.$

$f(0) = 0^2 \cdot e^0 = 0 \Rightarrow \underline{Mínimo: O(0,0)}.$

$d)$

$f'(x) = x \cdot e^x \cdot (2+x).$

$f'(1) = 1 \cdot e^1 \cdot (2+1) \Rightarrow \underline{f'(1) = 3e}.$

****

6º) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas de ecuaciones $f(x) = -x^2 + 2x + 4 \;\; y \;\; g(x) = x^2 - 4x + 4$. Calcular su área.

Las abscisas de los puntos de intersección de las parábolas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$-x^2 + 2x + 4 = x^2 - 4x + 4; \;\; 2x^2 - 6x = 0; \;\; x^2 - 3x = 0; \;\; x(x-3) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3.$ Los puntos de corte son: $A(0,4) \; y \; B(3,1)$.

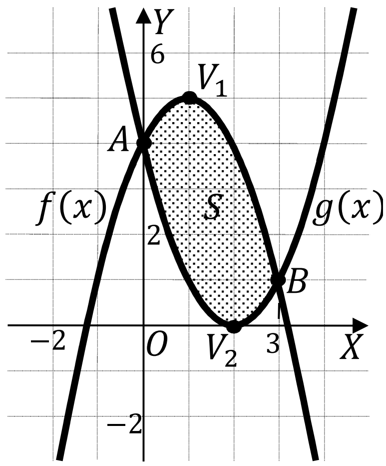
La parábola $f(x) = -x^2 + 2x + 4$, que es cóncava (∩), por ser negativo el coeficiente de x^2, tiene su vértice en el punto siguiente:

$$f'(x) = -2x + 2 = 0; \; -x + 1 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow V_1(1,5).$$

La parábola $g(x) = x^2 - 4x + 4$, que es convexa (∪) por ser positivo el coeficiente de x^2, tiene su vértice en el punto siguiente:

$$g'(x) = 2x - 4 = 0; \; x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow V_2(2,0).$$

La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.



Por ser las ordenadas de la parábola $g(x)$ iguales o menores que las correspondientes ordenadas de la parábola $f(x)$ en el intervalo del área a calcular, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^3 [(-x^2 + 2x + 4) - (x^2 - 4x + 4)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^3 (-x^2 + 2x + 4 - x^2 + 4x - 4) \cdot dx =$$

$$= \int_0^3 (-2x^2 + 6x)\, dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{6x^2}{2}\right]_0^3 = \left[-\frac{2x^3}{3} + 3x^2\right]_0^3 = \left(-\frac{2 \cdot 3^3}{3} + 3 \cdot 3^2\right) - 0 =$$

$$= -18 + 27 \Rightarrow \underline{S = 9 \; u^2}.$$

****

7º) Dada la función $f(x) = \int \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+2} \cdot dx$:

a) Calcular $\int \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1} \cdot dx$.

b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y la recta $x = 1$.

----

a)

$$\int \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1} \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} e^{x^2}+1=t \\ 2x \cdot e^{x^2} \cdot dx = dt \end{matrix}\right\} \Rightarrow \int \frac{1}{t} \cdot dt = Lt + C = \underline{L\left(e^{x^2}+1\right) + C}.$$

b)

La función $f(x) = L\left(e^{x^2}+2\right)$ es continua en su dominio, que es R, por ser $e^{x^2}+2 \geq 2, \forall x \in R$, por lo cual, sus ordenadas son mayores que cero en el intervalo que interesa, que es $(0, 1)$, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^1 f(x) \cdot dx = \int_0^1 \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+2} \cdot dx = \left[L\left(e^{x^2}+2\right)\right]_0^1 =$$

$$= L(e^1+2) - L(e^0+2) = L(e+2) - L3 \Rightarrow \underline{S = L\frac{e+2}{3}\ u^2 \cong 0{,}45\ u^2}.$$

****

8º) a) En el departamento informático de unos grandes almacenes se encuentran a la venta ordenadores de distintas marcas comerciales. Hay 100 ordenadores de la marca A, 60 de la marca B y 40 de la marca C. La probabilidad de que un ordenador esté obsoleto es 0,01 para la marca A; 0,02 para la marca B y 0,03 para la marca C. Un comprador elige un ordenador al azar:

I) Calcule la probabilidad de que el ordenador esté obsoleto.

II) Sabiendo que el ordenador elegido es obsoleto, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca A?

b) El salario mensual de los hogares de un municipio se distribuye según una variable Normal con desviación típica igual a 160 euros. Seleccionados 40 hogares al azar, han tenido un salario medio mensual de 1.100 euros. Calcule un intervalo de confianza para el salario medio mensual de los hogares de ese municipio con un nivel de confianza del 95 %.

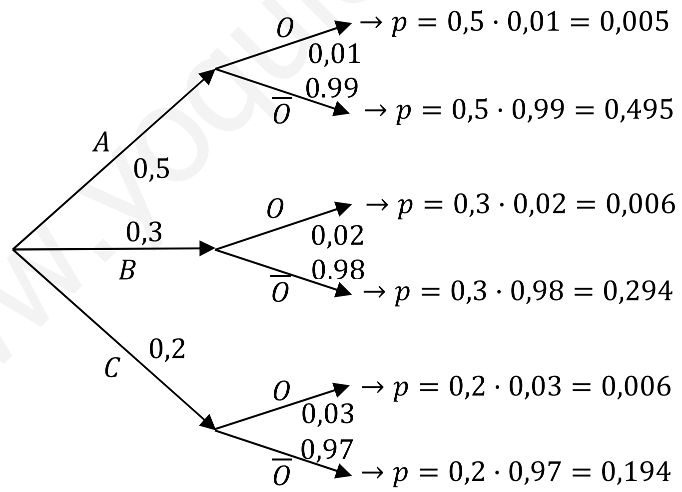
----

a)

El número de ordenadores es $N = 100 + 60 + 40 = 200$.

Las probabilidades de elegir un ordenados de cada una de las marcas es el siguiente:

$$P(A) = \frac{100}{200} = 0{,}5;\ \ P(B) = \frac{60}{200} = 0{,}3;\ \ P(C) = \frac{40}{200} = 0{,}2.$$



I)

$$P = P(O) = P(A \cap O) + P(B \cap O) + P(C \cap O) =$$

$$= P(A) \cdot P(O/A) + P(B) \cdot P(O/B) + P(C) \cdot P(O/C) =$$

$$= 0{,}5 \cdot 0{,}01 + 0{,}3 \cdot 0{,}02 + 0{,}2 \cdot 0{,}03 = 0{,}005 + 0{,}006 + 0{,}006 = \underline{0{,}017}.$$

II)

$$P = P(A/O) = \frac{P(A \cap O)}{P(O)} = \frac{P(A) \cdot P(O/A)}{P(O)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}01}{0{,}0117} = \frac{0{,}005}{0{,}017} = \underline{0{,}2941}.$$

$b)$

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0{,}95 \ \rightarrow \ \alpha=1-0{,}95=0{,}05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$
$(1-0{,}025=0{,}9750 \ \rightarrow z=1{,}96).$

Datos: $n=40$; $\overline{x}=1.100$; $\sigma=160$; $z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma \ y \ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$$\left(1.100-1{,}96\cdot\frac{160}{\sqrt{40}};\ 1.100+1{,}96\cdot\frac{160}{\sqrt{40}}\right);$$

$$(1.100-1{,}96\cdot 25{,}2982;\ 1.100+1{,}96\cdot 25{,}2982);$$

$$(1.100-49{,}5845;\ 1.100+49{,}5845).$$

$$\underline{I.C._{95\ \%}=(1.050{,}4155;\ 1.149{,}5845).}$$

****