PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

JUNIO-2000

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a una sola de las dos cuestiones de cada uno de los bloques. La puntuación de las dos cuestiones de cada bloque es la misma.

BLOQUE 1

1º) a) Definir a qué se llama rango de una matriz.

b) Encontrar, en función de los valores de a, el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} a & a & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 1 & a & a \end{pmatrix}$.

----

a)

Todas las matrices, mediante transformaciones elementales, se pueden transformar en matrices escalonadas.

Una matriz escalonada es aquella en la cual, si tiene filas nulas están situadas en la parte inferior de la matriz y, en las filas no nulas, el primer elemento distinto de cero de una fila está situado más a la derecha que el primer elemento diferente de cero de la fila superior.

El rango de una matriz escalonada es el número de filas no nulas.

El rango de una matriz A es el rango de una matriz escalonada equivalente a A.

También puede definirse el rango de una matriz por su determinante, para lo cual es necesario definir menor de orden k de una matriz que es el determinante de cualquier submatriz cuadrada de orden k que se puede formar con los elementos de la matriz.

El rango de una matriz A es el orden del mayor menor que puede formarse que sea distinto de cero.

b)

Para determinar el rango de $A=\begin{pmatrix} a & a & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 1 & a & a \end{pmatrix}$ estudiamos sistemáticamente las distintas columnas:

$$\{C_1,\ C_2,\ C_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3+1+a^2-a-a^2-a^2 = a^3-a^2-a+1=0\ ;;$$

$$a^2(a-1)-(a-1)=0\ ;;\ (a-1)(a^2-1)=(a-1)(a+1)(a-1)=(a-1)^2(a+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{a_1=1} \\ \underline{a_2=-1} \end{cases}$$

$$\{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3+1+a-a-a-a^2 = a^3-a^2-a+1=0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{a_1=1} \\ \underline{a_2=-1} \end{cases}$$

$$\{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix} = a^3+a^2+1-a-a^2-a^2 = a^3-a^2-a+1=0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{a_1=1} \\ \underline{a_2=-1} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{Para\ \begin{Bmatrix} a\neq 1 \\ a\neq -1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ \ A=3}}$$

$$Para\ \ a=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{Rango\ \ A=1}}$$

$$Para\ \ a=-1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{Rango\ \ A=2}}$$

****

2º) Determinar un vector $\overrightarrow{v}$ de R^3, sabiendo que:

--- La suma de sus coordenadas es 3.

--- $\overrightarrow{v}$ es combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{u}=(2,\ 2,\ 2)$ y $\overrightarrow{w}=(-1,\ 1,\ 0)$.

--- Los vectores $\overrightarrow{a}=(1,\ 0,\ 1)$ y $\overrightarrow{b}=(0,\ 1,\ 0)$ y $\overrightarrow{v}$ son linealmente dependientes.

Sea el vector pedido $\overrightarrow{v}=(x,\ y,\ z)$.

Por la primera condición tiene que ser: $\underline{x+y+z=3}$ (1)

De la segunda condición se deduce que el conjunto $\left\{\overrightarrow{v},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{w}\right\}$ tiene rango 2:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ -2y+2z+2z-2x=0\ ;;\ \underline{x+y-2z=0} \qquad (2)$$

Por último, de la tercera condición, rango de $\left\{\overrightarrow{v},\ \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right\}=2$:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ z-x=0\ ;;\ \underline{x-z=0} \qquad (3)$$

De la ecuación (3) se deduce que x = z. Sustituyendo en las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ x+y-2z=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2x+y=3 \\ -x+y=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2x+y=3 \\ x-y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=3\ ;;\ \underline{x=z=1}\ ;;\ \underline{y=1}$$

$$\underline{\underline{El\ \ vector\ \ pedido\ \ es\ \ \overrightarrow{v}=(1,\ 1,\ 1)}}$$

****

BLOQUE 2

1º) a) Definición de parábola.

b) Encontrar la ecuación de la parábola que tiene por foco el punto F(-1, 1) y por directriz la recta de ecuación $y = x - 2$.

----

a)

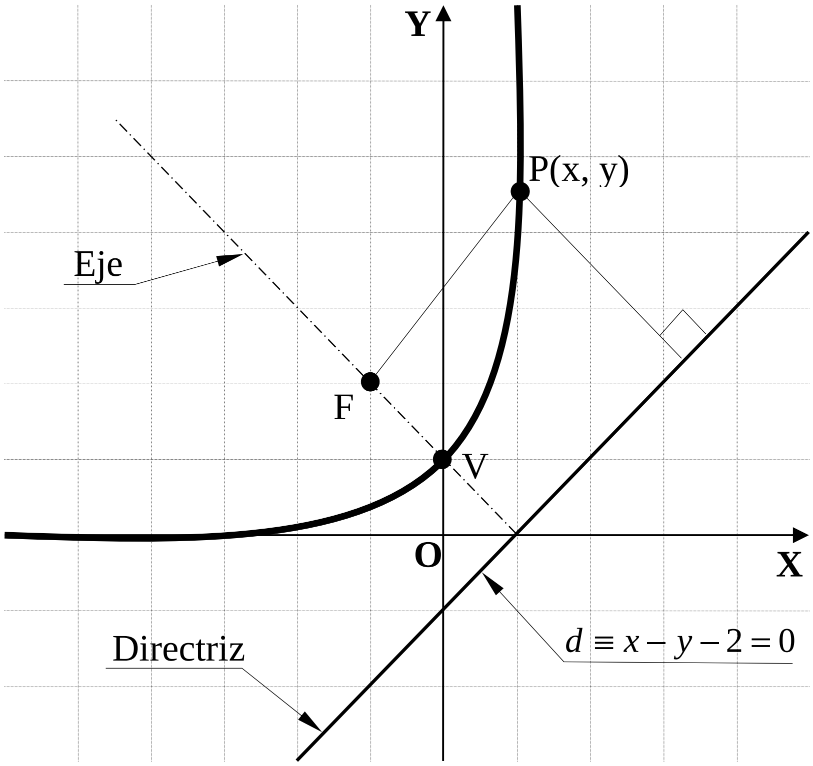
Se define como parábola al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo, llamado foco, y de una recta llamada directriz. A la distancia del punto foco a la directriz se le llama parámetro.

La recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco es el eje de la parábola y el punto de intersección del eje con la parábola se llama vértice.

El parámetro es el valor que determina las dimensiones de la parábola ya que, de la definición se deduce, todas las parábolas son semejantes.

b)

La representación gráfica de la parábola es la figura adjunta.



Por definición de parábola es: $\overline{FP} = \overline{PQ}$.

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1} = \underline{\sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2} = \overline{PQ}}$$

La distancia de un punto P(x, y) a una recta $r \equiv Ax + By + C = 0$ viene dada por la fórmula: $d(P,\ r) = \frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Aplicando la fórmula al caso que nos ocupa:

$$\overline{QP} = \frac{|x-y-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|x-y-2|}{\sqrt{1+1}} = \underline{\frac{|x-y-2|}{\sqrt{2}} = \overline{QP}}$$

$$\overline{PQ} = \overline{QP} \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2+2x-2y+2} = \frac{|x-y-2|}{\sqrt{2}} \ ;;$$

$$\left(\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2+2x-2y+2}\right)^2 = \left(|x-y-2|\right)^2 \ ;;$$

$$2\left(x^2+y^2+2x-2y+2\right) = x^2+y^2+4-2xy-4x+4y \ ;;$$

$$2x^2+2y^2+4x-4y+4 = x^2+y^2-4x+4y-2xy+4 \ ;;$$

$$\underline{\underline{x^2+y^2+8x-8y-2xy=0}}$$

****

2º) a) Determinar la distancia del punto P(12, -1, 1) a la recta r que pasa por Q(1, 1, 1) y tiene como vector director $\overrightarrow{v}=(3,\ 4,\ 0)$.

b) Encontrar el punto (o puntos) de la recta r que (o determinan) junto con P y Q un triángulo de área 50 unidades cuadradas.

----

a)

La recta r, expresada por unas ecuaciones paramétricas es: $r\equiv\begin{cases}x=1+3\lambda\\ y=1+4\lambda\\ z=1\end{cases}$.

Sabiendo que la distancia de un punto a una recta es $d(P,\ r)=\dfrac{\left|\overrightarrow{QP}\wedge\overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}$, siendo Q un punto cualquiera de la recta y $\overrightarrow{v}$ un vector director de la recta.

Un punto de r es Q(1, 1, 1) y un vector director puede ser $\overrightarrow{v}=(3,\ 4,\ 0)$.

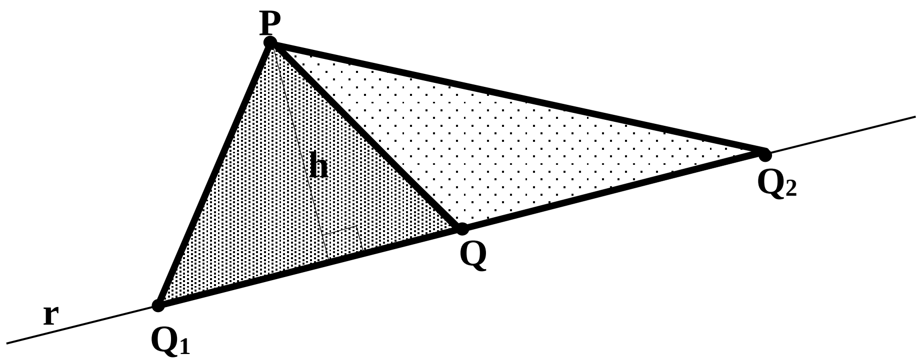
$$\overrightarrow{QP}=P-Q=(12,\ -1,\ 1)-(1,\ 1,\ 1)=(11,\ -2,\ 0).$$

Aplicando la fórmula:

$$d(P,\ r)=\frac{\left|\overrightarrow{QP}\wedge\overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}=\frac{\left\|\begin{vmatrix}i & j & k\\ 11 & -2 & 0\\ 3 & 4 & 0\end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{3^2+4^2+0^2}}=\frac{\left|44k+64\right|}{\sqrt{9+16+0}}=\frac{\left|50k\right|}{\sqrt{25}}=\frac{50}{5}=\underline{\underline{10\ u=d(P,\ r)}}$$

b)

Como puede observarse existen dos triángulos que cumplen la condición impuesta. Como la altura de los triángulos es de 10 unidades, para que el área sea de 50 unidades cuadradas, la base tiene que tener 10 unidades; o sea, que se trata de hallar los puntos Q_1 y Q_2 de r que disten 10 unidades de Q.



Los puntos de r son de la forma $Q_1(1+3\lambda,\ 1+4\lambda,\ 1)$.

$\overline{QQ_1} = \sqrt{(1+3\lambda-1)^2+(1+4\lambda-1)^2} = 10$;; $(3\lambda)^2+(4\lambda)^2 = 10^2$;; $9\lambda^2+16\lambda^2 = 100$;;

$25\lambda^2 = 100$;; $\lambda^2 = 4$;; $\underline{\lambda_1 = 2}$;; $\underline{\lambda_2 = -2}$

$$\underline{\underline{Q_1(7,\ 9,\ 1)\ \ y\ \ Q_2(-5,\ -7,\ 1)}}$$

****

BLOQUE 3

1º) Se considera la curva $y=\frac{(x-1)(x-2)}{x^2+1}$. Se pide:

a) Dominio de definición y cortes con los ejes.

b) Asíntotas, cortes con las asíntotas y regiones.

c) Valores de x en los que la curva puede presentar máximos o mínimos relativos.

d) Representación aproximada.

e) Determinar, si existen, los valores de x en los que la función $f(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{x^2+1}$ alcanza el máximo y el mínimo absolutos, justificando la respuesta.

----

a)

Por tratarse de una curva racional su dominio son todos los valores reales de x, excepto aquellos que anulen el denominador. Como $x^2+1\neq 0,\ \forall x\in R$, el dominio de la curva es R.

Los puntos de corte con los ejes son:

Eje X: $y=0\ \Rightarrow\ (x-1)(x-2)=0\ ;;\ x_1=1\ ;;\ x_1=0\Rightarrow \underline{\underline{A(1,\ 0)\ \ y\ \ B(2,\ 0)}}$

Eje Y: $x=0\ \Rightarrow\ y=\frac{(0-1)(0-2)}{0^2+1}=2\ \Rightarrow\ \underline{\underline{C(0,\ 2)}}$

b)

Las asíntotas pueden ser horizontales, verticales y oblicuas.

Asíntotas horizontales: Son los valores de y cuando x tienen a más infinito y a menos infinito:

$$y=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)(x-2)}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-1)(x-2)}{x^2+1}=\underline{\underline{1=y}}$$

Asíntotas verticales: Son los valores de x que anulan el denominador.

No existen asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas: Solamente tienen asíntotas oblicuas las curvas racionales cuyo numerador tiene por grado una unidad mayor que el denominador.

No existen asíntotas oblicuas.

Los cortes de la asíntota con la curva son las soluciones del sistema formado por las ecuaciones de ambas:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2+1} \\ y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{(x-1)(x-2)}{x^2+1} = 1 \;\;;;\;\; x^2 - 3x + 2 = x^2 + 1 \;\;;;\;\; 3x = 1 \;\;;;\;\; x = \frac{1}{3} \Rightarrow \underline{\underline{D\left(\frac{1}{3},\ 1\right)}}$$

Una región de una curva es la porción limitada entre dos líneas verticales, por lo cual, como no tiene asíntotas verticales, la curva carece de regiones.

c)

Los máximos y mínimos relativos son:

$$y' = \frac{(2x-3)\left(x^2+1\right) - \left(x^2-3x+2\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2x^3+2x-3x^2-3-2x^3+6x^2-4x}{\left(x^2+1\right)^2} =$$

$$= \underline{\frac{3x^2-2x-3}{\left(x^2+1\right)^2} = y'}$$

Para que la función presente máximos o mínimos relativos es necesario que se anule la primera derivada:

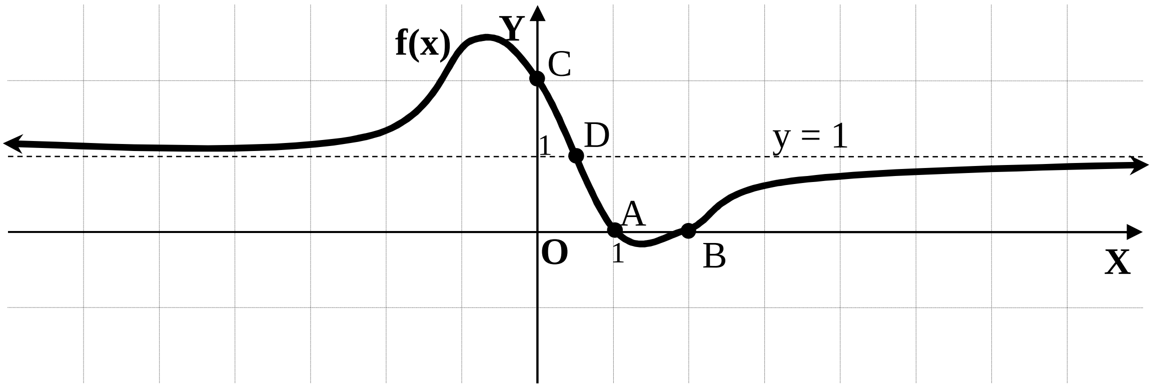
$$y' = 0 \;\Rightarrow\; 3x^2 - 2x - 3 = 0 \;\;;;\;\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4+36}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{40}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{10}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3}$$

Los valores de x para los que pueden existir máximos y mínimos relativos de la curva son:

$$\underline{\underline{x_1 = \frac{1-\sqrt{10}}{3}}} \;\; y \;\; \underline{\underline{x_2 = \frac{1+\sqrt{10}}{3}}}$$

d)

La representación aproximada de la función es la que sigue.



e)

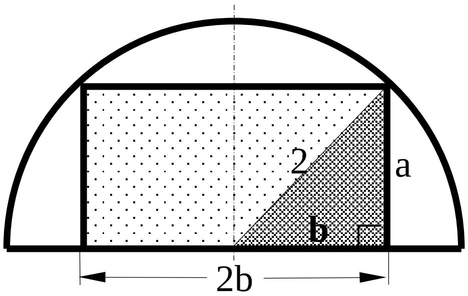
Para determinar, si existen, los valores de x en los que la función $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2+1}$ alcanza el máximo y el mínimo absolutos tenemos en cuenta la continuidad de la función en su dominio, que es R.

Por otra parte, la primera derivada admite solamente dos soluciones, lo que significa, necesariamente, que tiene un solo máximo y un solo mínimo, que son, en este caso, máximo absoluto y mínimo absoluto.

Lo anterior se puede observar claramente en la gráfica de la función.

****

2º) Determinar las dimensiones de los lados y el área del rectángulo de área máxima que, teniendo uno de los lados sobre el diámetro, se puede inscribir en un semicírculo de 2 metros de radio.



Siendo a y 2b las dimensiones del rectángulo, su área es:

$$S = 2a \cdot b \Rightarrow \text{máximo}$$

Del triángulo rectángulo más sombreado de la figura se deduce que:

$2^2 = a^2 + b^2$;; $4 = a^2 + b^2$;; $b = \sqrt{4 - a^2}$. Sustituyendo en la superficie:

$$S = 2a \cdot b = 2a \cdot \sqrt{4 - a^2} = 2\sqrt{4a^2 - a^4}$$

$$S' = 2 \cdot \frac{8a - 4a^3}{2\sqrt{4a^2 - a^4}} = \frac{8a - 4a^3}{a\sqrt{4 - a^2}} = \frac{8 - 4a^2}{\sqrt{4 - a^2}} \quad ;; \quad S' = 0 \Rightarrow \frac{8 - 4a^2}{\sqrt{4 - a^2}} = 0 \;;;\; 8 - 4a^2 = 0 \;;;$$

$$a^2 = 2 \;;;\; \underline{a = \sqrt{2}} \;;;\; b = \sqrt{4 - 2} = \underline{\sqrt{2} = b = a}$$

Justificación de que se trata de un máximo:

$$S' = \frac{8 - 4a^2}{\sqrt{4 - a^2}} \Rightarrow S'' = \frac{-8a\sqrt{4 - a^2} - \left(8 - 4a^2\right)\frac{-2a}{2\sqrt{4 - a^2}}}{\left(\sqrt{4 - a^2}\right)^2} = \frac{-8a\sqrt{4 - a^2} + \frac{a\left(8 - 4a^2\right)}{\sqrt{4 - a^2}}}{4 - a^2} =$$

$$= \frac{-8a\left(4 - a^2\right) + a\left(8 - 4a^2\right)}{\left(4 - a^2\right)\sqrt{4 - a^2}} = \frac{-32a + 8a^3 + 8a - 4a^3}{\left(4 - a^2\right)\sqrt{4 - a^2}} = \frac{4a^3 - 24a}{\left(4 - a^2\right)\sqrt{4 - a^2}} = \frac{4a\left(a^2 - 6\right)}{\left(4 - a^2\right)\sqrt{4 - a^2}} =$$

$$\underline{= \frac{4a\left(a^2 - 6\right)\sqrt{4 - a^2}}{\left(4 - a^2\right)^2} = S''}$$

$$S_{(\sqrt{2})}'' = \frac{4\sqrt{2}\,(2 - 6)\sqrt{4 - 2}}{(4 - 2)^2} = \frac{-32}{4} = \underline{-8 < 0 \Rightarrow \text{Máx. c.q.j.}}$$

El valor de la superficie es $S = 2a \cdot b = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \underline{\underline{4\ u^2 = S}}$

La base tiene $2\sqrt{2}$ metros y la altura $\sqrt{2}$ metros.

****

BLOQUE 4

1º) Si f y g son funciones continuas y positivas en el intervalo [a, b], justificar, mediante argumentos geométricos, si las siguientes afirmaciones son ciertas.

i) $\int_a^b f(x) \cdot dx \geq 0$.

ii) $\int_a^b [f(x) + g(x)] \cdot dx = \int_a^b f(x) \cdot dx + \int_a^b g(x) \cdot dx$.

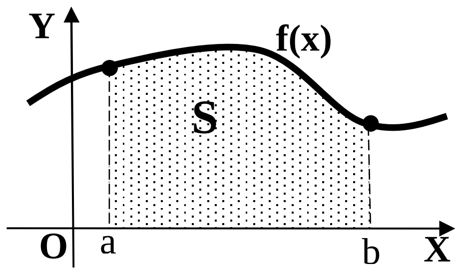
iii) $\int_a^b [f(x) \cdot g(x)] \cdot dx = \int_a^b f(x) \cdot dx \cdot \int_a^b g(x) \cdot dx$.

iv) $\int_a^c f(x) \cdot dx + \int_c^b f(x) \cdot dx = \int_a^b f(x) \cdot dx, \quad c \in (a,\ b)$.

Si alguna es falsa, poner un contraejemplo.

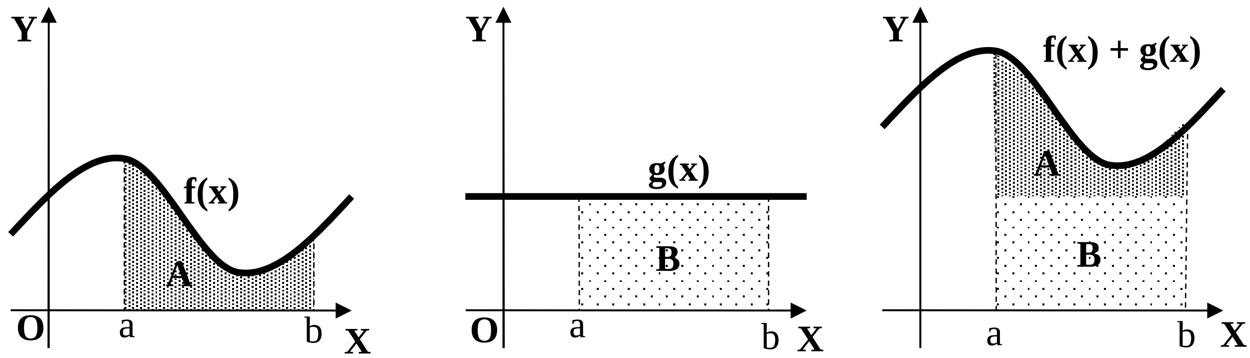
----

i) $\int_a^b f(x) \cdot dx \geq 0 \quad \Rightarrow$ *Cierta*.



La superficie existe en todos los casos, excepto en el caso de ser f(x) = 0, en cuyo caso será S = 0, que también se incluye en la condición.

ii) $\int_a^b [f(x) + g(x)] \cdot dx = \int_a^b f(x) \cdot dx + \int_a^b g(x) \cdot dx \quad \Rightarrow$ *Cierta*.



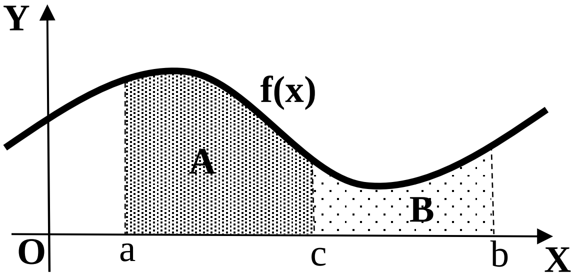
iii) $\int_a^b [f(x) \cdot g(x)] \cdot dx = \int_a^b f(x) \cdot dx \cdot \int_a^b g(x) \cdot dx \quad \Rightarrow$ *Falsa*.

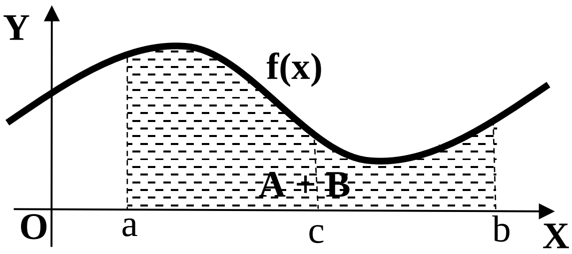
Como contraejemplo, consideremos las funciones f(x) = x y g(x) = 1 en el intervalo [1, 2].

$$\int_1^2 [f(x) \cdot g(x)] \cdot dx = \int_1^2 (x \cdot 1) \cdot dx = \int_1^2 x \cdot dx = [x]_1^2 = 2 - 1 = \underline{1\ u^2}$$

$$\int_1^2 f(x) \cdot dx \cdot \int_1^2 g(x) \cdot dx = \int_1^2 x \cdot dx \cdot \int_1^2 1 \cdot dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 \cdot [x]_1^2 = \left(2 - \frac{1}{2}\right) \cdot (2-1) = \frac{3}{3} \cdot 1 = \underline{\frac{3}{2}\ u^4\ ??}$$

iv) $\int_a^c f(x) \cdot dx + \int_c^b f(x) \cdot dx = \int_a^b f(x) \cdot dx, \quad c \in (a,\ b) \ \Rightarrow$ $\underline{\underline{\textit{Cierta}}}$.





****

2º) a) Enunciar la Regla de Barrow.

b) Determinar el área comprendida entre las curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ y la recta que pasa por los puntos A(2, 4) y B(4, 2).

----

a)

El enunciado de la regla de Barrow es el siguiente:

Si f(x) es una función continua en el intervalo [a, b] y F(x) es una función primitiva de f(x) en dicho intervalo, entonces se verifica la siguiente igualdad:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a)$$

b)

La ecuación de la recta que pasa por los puntos A(2, 4) y B(4, 2) es la siguiente:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (4,\ 2) - (2,\ 4) = (2,\ -2) \Rightarrow m = \frac{-2}{2} = \underline{-1 = m}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = -1 \cdot (x - 4) = -x + 4 \ ;;\ \underline{y = -x + 6}$$

Los puntos de corte de la recta con las curvas son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = -x + 6 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = -x + 6 \ ;;\ x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \rightarrow y_1 = 4 \Rightarrow \underline{A(2,\ 4)} \\ x_2 = -3 \rightarrow y_2 = 9 \Rightarrow \underline{C(-3,\ 9)} \end{cases}$$

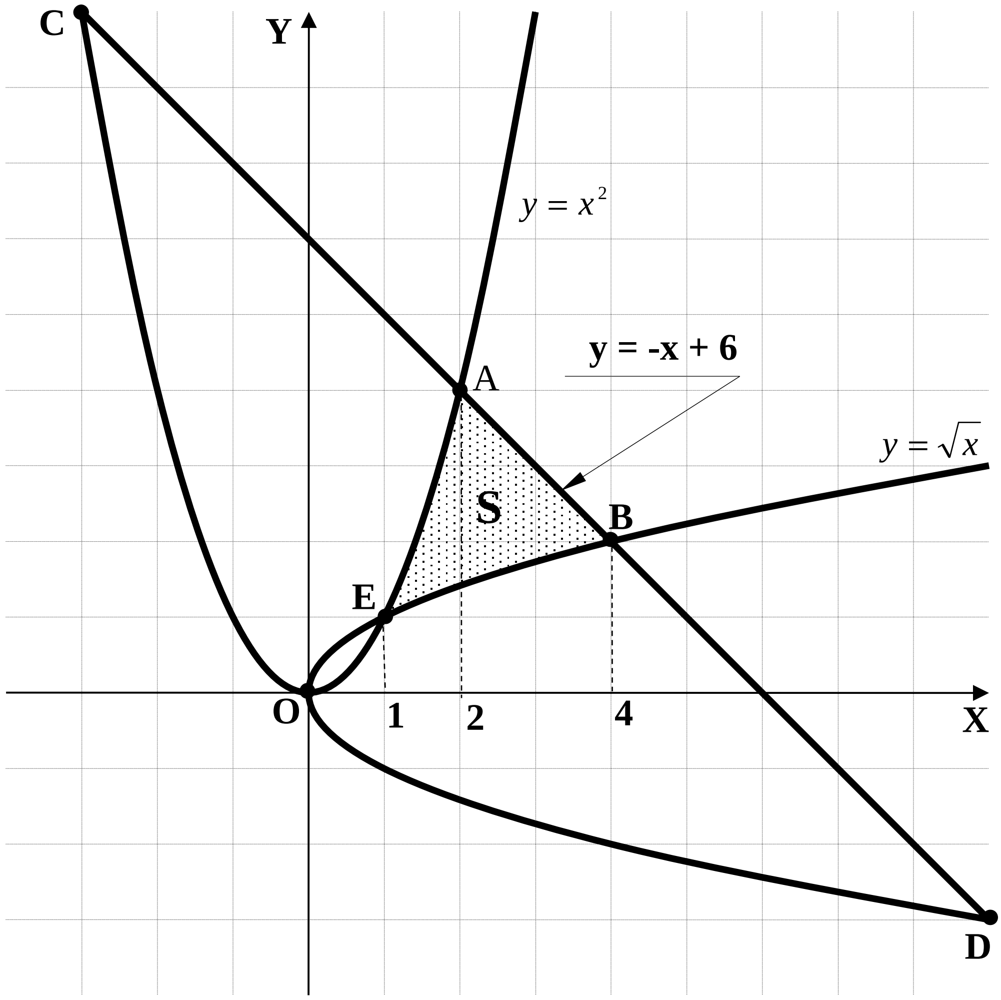
$$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{x} \\ y = -x + 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{x} = -x + 6 \ ;;\ x = x^2 - 12x + 36 \ ;;\ x^2 - 13x + 36 = 0$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 9 \rightarrow y_3 = -3 \Rightarrow \underline{D(9,\ -3)} \\ x_4 = 4 \rightarrow y_4 = 2 \Rightarrow \underline{B(4,\ 2)} \end{cases}$$

Los puntos de corte de las dos curvas son:

$$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{x} \\ y = x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{x} = x^2 \ ;;\ x = x^4 \ ;;\ x^4 - x = 0 \ ;;\ x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow \underline{O(0,\ 0)} \\ x_2 = 1 \rightarrow \underline{E(1,\ 1)} \end{cases}$$

La representación gráfica de la situación se expresa en la gráfica adjunta.



De la observación de la figura se deduce que el área pedida es la siguiente:

$$S=\int_1^2\left(x^2-\sqrt{x}\right)\cdot dx+\int_2^4\left[\left(-x+6\right)-\sqrt{x}\right]\cdot dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^{\frac{3}{3}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^2+\left[-\frac{x^2}{2}+6x-\frac{x^{\frac{3}{3}}}{\frac{3}{2}}\right]_2^4=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{2x\sqrt{x}}{3}\right]_1^2+\left[-\frac{x^2}{2}+6x-\frac{2x\sqrt{x}}{3}\right]_2^4=$$

$$=\left[\left(\frac{8}{3}-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)\right]+\left[\left(-8+24-\frac{16}{3}\right)-\left(-2+12-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)\right]=$$

$$=\frac{8}{3}-\frac{4\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{3}+16-\frac{16}{3}-10+\frac{4\sqrt{2}}{3}=6-\frac{7}{3}=\underline{\underline{\frac{11}{3}\ u^2=S}}$$

****