PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

SEPTIEMBRE - 2002

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a una sola de las dos cuestiones de cada uno de los bloques. La puntuación de las dos cuestiones de cada bloque es la misma.

BLOQUE 1

1º) a) Definir qué se entiende por conjunto de vectores linealmente independientes.

b) Determinar, en función de los valores de λ y μ, el máximo número de vectores independientes que se puede extraer del siguiente conjunto de vectores:

$$\overrightarrow{u} = (2\lambda - 1,\ \lambda,\ \lambda),\quad \overrightarrow{v} = (2\lambda - 1,\ \mu - 1,\ 0)\ \ y\ \ \overrightarrow{w} = (\lambda,\ \lambda,\ \lambda)$$

---

a) Dado un conjunto de vectores en el espacio, decimos que son linealmente independientes si ninguno de ellos puede expresarse como combinación lineal de los demás. En caso contrario se dice que son linealmente dependientes.

Al mayor número de vectores de un conjunto que son linealmente independientes se llama rango. Por ejemplo, en un conjunto de tres vectores, son linealmente independientes cuando no están en el mismo plano.

Para determinar el rango de varios vectores se determina el rango de la matriz que forman.

$$b)\ \begin{vmatrix} 2\lambda-1 & \lambda & \lambda \\ 2\lambda-1 & \mu-1 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 2\lambda-1 & \mu-1 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)\cdot\begin{vmatrix} \mu-1 & 0 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)\cdot\begin{vmatrix} \mu-1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda(\lambda-1)\cdot(\mu-1) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \\ \mu = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{Rango = 2}}$$

Para $\{\lambda \neq 0\,;\, \lambda \neq 1\,;\, \mu \neq 1\}$, los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ tienen rango 3, que es el máximo rango que pueden tener; en esta caso son linealmente independientes.

****

2º) a) Enunciar el Teorema de Rouché-Fröbenius.

b) Clasificar, según los valores de λ, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda \\ x + y + z = \lambda \end{cases}$$

c) Resolverlo, si es posible, para $\lambda = 1$.

---

a)

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones con n incógnitas tenga solución es que coincida el rango de la matriz de los coeficientes con el rango de la matriz ampliada con los términos independientes.

Si el rango es igual al número de incógnitas el sistema es compatible determinado.

Si el rango es menor que el número de incógnitas el sistema es compatible indeterminado.

En el caso particular de un sistema homogéneo, la condición necesaria y suficiente para que un sistema sea compatible es que el rango de la matriz de los coeficientes sea menor que el número de incógnitas. La condición necesaria y suficiente para que un sistema de n ecuaciones homogéneas con n incógnitas sea compatible es que el determinante de la matriz de los coeficientes sea nulo.

b)

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ;; \quad M' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda + 1 + \lambda - 1 - 1 - \lambda^2 = -\lambda^2 + 2\lambda - 1 = -(\lambda - 1)^2 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\lambda = 1}$$

$$Para\ \lambda \neq 1 \Rightarrow Rango\, M = Rango\ M' = 3 = n^o\ incógnitas \Rightarrow \underline{\underline{Compatible\ \ determinado}}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ \lambda = 1\ \ el\ \ rango\ \ M' = 1 \Rightarrow Compatible\ \ Indeterminado}}$$

c)

Para $\lambda = 1$ resulta : x + y + z = 1; las infinitas soluciones se obtienen fijando el valor de dos de las incógnitas y calculando la tercera.

****

BLOQUE 2

1º) Estudiar si las rectas: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x - 2z = 3 \\ y + z = 0 \end{cases}$ determinan un plano y, en caso afirmativo, encontrar su ecuación.

En primer lugar vamos a expresar la recta s por unas ecuaciones paramétricas:

$$s \equiv \begin{cases} x - 2z = 3 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = k} \Rightarrow \begin{cases} \underline{x = 3 + 2k} \\ \underline{y = -k} \end{cases} \Rightarrow \underline{s \equiv \begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = -k \\ z = k \end{cases}}$$

Las dos rectas tienen el mismo vector director: $\vec{u} = (2, -1, 1)$, por lo tanto: o son coincidentes o paralelas.

Para diferenciar el caso comprobamos si un punto de r, A(1, 1, 3), pertenece o no a la recta s:

$$s \equiv \begin{cases} x - 2z = 3 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1, 1, 3) \Rightarrow \begin{cases} 1 - 2 \cdot 3 \neq 3 \\ 1 + 3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{A \notin s} \Rightarrow \underline{\underline{Las\ \ rectas\ \ son\ \ paralelas}}$$

Para determinar el plano π que las contiene consideramos el vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, siendo B(3, 0, 0) un punto de la recta s:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3, 0, 0) - (1, 1, 3) = \underline{(2, -1, -3) = \vec{v}}$$

El plano pedido es el que tienen como vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y contiene, por ejemplo al punto B(3, 0, 0):

$$\pi(B;\ \vec{u},\ \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x - 3 & y & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ 3(x - 3) + 2y - 2z + 2z + (x - 3) + 6y = 0\ ;;$$

$$4(x - 3) + 8y = 0\ ;;\ x - 3 + 2y = 0\ ;;\ \underline{\underline{\pi \equiv x + 2y - 3 = 0}}$$

****

2º) a) Hallar la distancia del punto P(1, 1, 1) a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

b) Comprobar si los puntos A(1, -1, 3) y B(0, -2, 1) pertenecen a la recta r y determinar el área del triángulo PAB.

---

a)

La distancia de un punto a una recta viene dada por la siguiente fórmula: $d(P,\ r) = \dfrac{\left|\overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}$, siendo Q(1, -1, 3) un punto de r y $\overrightarrow{v} = (1,\ 1,\ 2)$ un vector director de la recta r.

$$\overrightarrow{QP} = P - Q = (1, 1, 1) - (1, -1, 3) = \underline{(0,\ 2,\ -2) = \overrightarrow{QP}}$$

$$d(P,\ r) = \frac{\left|\overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|} = \frac{\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix} \right\|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{\left| 4i - 2j - 2k + 2i \right|}{\sqrt{6}} = \frac{\left| 6i - 2j - 2k \right|}{\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{\sqrt{6^2 + (-2)^2 + (-2)^2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{36 + 4 + 4}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{44}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{22}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{22} \cdot \sqrt{3}}{3} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{66}}{3}\ u \cong 2'71\ u = d(P,\ r)}}$$

b)

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(1, -1, 3) \rightarrow \underline{\underline{A \in r}}\ (es\ evidente\ en\ la\ ecuación) \\ B(0, -2, 1) \rightarrow \left\{ \begin{matrix} 0 = 1 + t\ ;;\ t = -1 \\ -2 = -1 + t\ ;;\ t = -1 \\ 1 = 3 + 2t\ ;;\ t = -1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{B \in r}} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, -2, 1) - (1, -1, 3) = \underline{(-1,\ -1,\ -2) = \overrightarrow{AB}}$$

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (1, 1, 1) - (1, -1, 3) = \underline{(0,\ 2,\ -2) = \overrightarrow{AP}}$$

$$Área\ (PAB) = \frac{1}{2} \cdot \left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AP} \right\| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot \left| 2i - 2k + 4i - 2j \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| 6i - 2j - 2k \right| = \frac{\sqrt{6^2 + (-2)^2 + (-2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{36 + 4 + 4}}{2} = \frac{\sqrt{44}}{2} = \underline{\underline{\sqrt{11} \cong 3'32\ u^2 = Área}}$$

****

BLOQUE 3

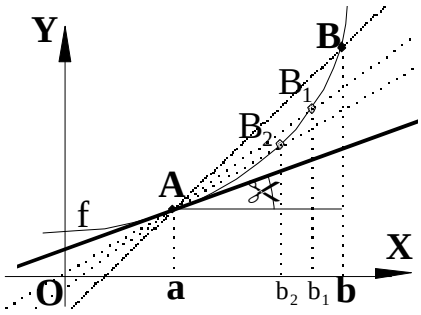
1º) a) Definir a qué se llama derivada de una función en un punto.

b) Utilizando la definición de derivada, calcular la derivada de $f(x) = x^3 - 3x$ en $x_0 = 1$.

c) Encontrar la ecuación de la tangente a la curva $y = x^3 - 3x$ en el punto de abscisa $x_0 = 1$.

---

a)



Consideremos la función f de la figura, continua en el punto A, de abscisa a. Se denomina tasa de variación media de un intervalo cerrado [a, b] a la expresión:

$$TVM\,[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad (1)$$

La TVM[a, b] es la tangente o pendiente de la secante de la función f que pasa por los punto A y B.

La derivada de una función en un punto es la tasa de variación instantánea de la función en ese punto, o sea, es el límite cuando $b \to a$ de la fracción (1). Si hacemos el cambio de variable b - a = h, queda finalmente la expresión de la derivada, que se expresa como sigue:

$$f'(a) = y'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

La interpretación gráfica de la derivada de una función en un punto puede deducirse de la observación de la figura: cuando $b \to a$ (h tiende a cero), el punto B tiende a aproximarse indefinidamente al punto A, con lo cual la secante tiende a confundirse con la tangente; es decir:

<u>la derivada de una función en un punto es la tangente de la función en ese punto.</u>

b) Utilizando la definición de derivada, calcular la derivada de $f(x) = x^3 - 3x$ en $x_0 = 1$.

$$f(x) = x^3 - 3x = x(x^2 - 3) \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)\left[(x+h)^2 - 3\right] - x(x^2 - 3)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)(x^2 + 2hx + h^2 - 3) - x^3 + 3x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 2hx^2 + h^2x - 3x + hx^2 + 2h^2x + h^3 - 3h - x^3 + 3x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3 - 3h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(3x^2 + 3hx + h^2 - 3)}{h} = 3x^2 - 3 = \underline{\underline{3(x^2 - 1) = f'(x)}}$$

$$Para \;\; x_0 = 1 \Rightarrow f'(1) = 3 \cdot (1^2 - 1) = \underline{\underline{0 = f'(1)}}$$

c)

La recta que pasa por un punto conocida la pendiente es: $y - y_0 = m(x - x_0)$.

$$y_0 = f(0) = 0 \Rightarrow \underline{P(0, 0)} \quad ;; \quad m = f'(0) = \underline{0 = m}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = 0(x - 0) \Rightarrow \underline{\underline{\text{Recta tangente}: y = 0}} \quad (Eje \;\; X)$$

****

2º) a) Enunciar una condición necesaria para que un punto x_0 sea un punto de máximo o de mínimo relativo de una función f que sea derivable en dicho punto.

b) Encontrar dos números positivos cuya suma sea 10 y tales que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.

---

a)

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo para un valor de abscisa, x_0, es que la función sea continua en ese punto, (lo cual se cumple por ser derivable) y que su derivada se anule para $x = x_0$.

La explicación es que una función es creciente en un punto cuando su derivada es positiva en ese punto y decreciente cuando su derivada es negativa; en un máximo o en un mínimo la función no es ni creciente ni decreciente y, como existe, necesariamente tiene que ser cero.

b)

$$Números: a \;\; y \;\; b. \quad a+b=10. \quad Y = a \cdot b^2 \;\Rightarrow\; Máximo.$$

$$a = 10 - b \;\Rightarrow\; Y = (10-b)\cdot b^2 = 10b^2 - b^3$$

$$Y' = 20b - 3b^2 = 0 \;;;\; b(20-3b) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} b_1 = 0 \;\rightarrow\; (para \;\; mínimo) \\ b_2 = \dfrac{20}{3} \end{cases}$$

$$a = 10 - b = 10 - \frac{20}{3} = \frac{30-20}{3} = \underline{\frac{10}{3} = a}$$

$$\underline{\underline{Los \;\; números \;\; son \;\; \frac{10}{3} \;\; y \;\; \frac{20}{3}}}$$

****

BLOQUE 4

1º) a) Utilizando el método de integración por partes, calcular $I = \int L\,x \cdot dx$.

b) Calcular el área determinada por la curva $y = L\,x$, el ejo OX y la recta x = e.

---

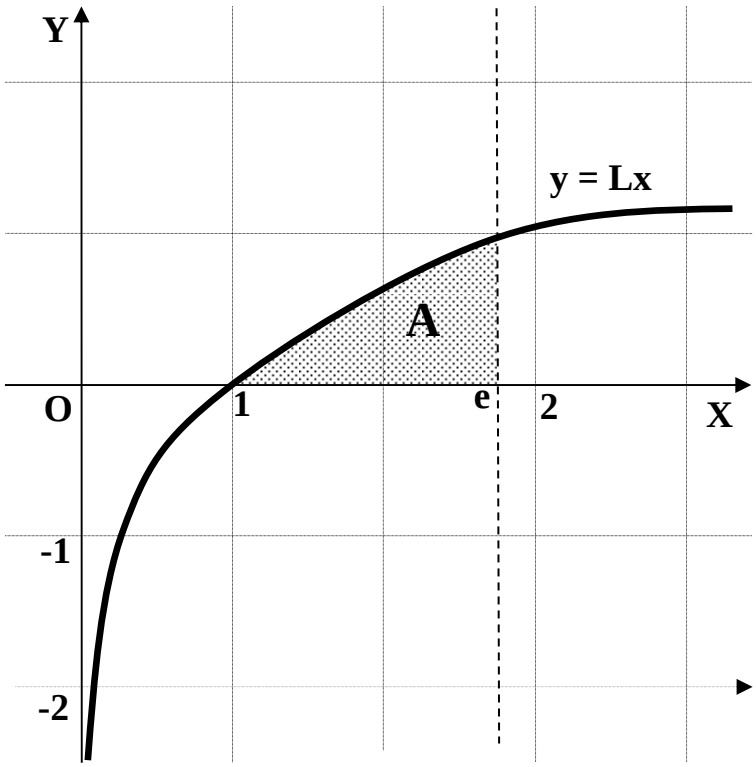
a)

$$I = \int L\,x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} L\,x = u \rightarrow du = \dfrac{1}{x} \cdot dx \\ dx = dv \rightarrow v = x \end{array} \right\} \Rightarrow I = L\,x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = x \cdot L\,x - \int dx =$$

$$= x \cdot L\,x - x + C = \underline{\underline{x(L\,x - 1) + C = I}}$$

b)

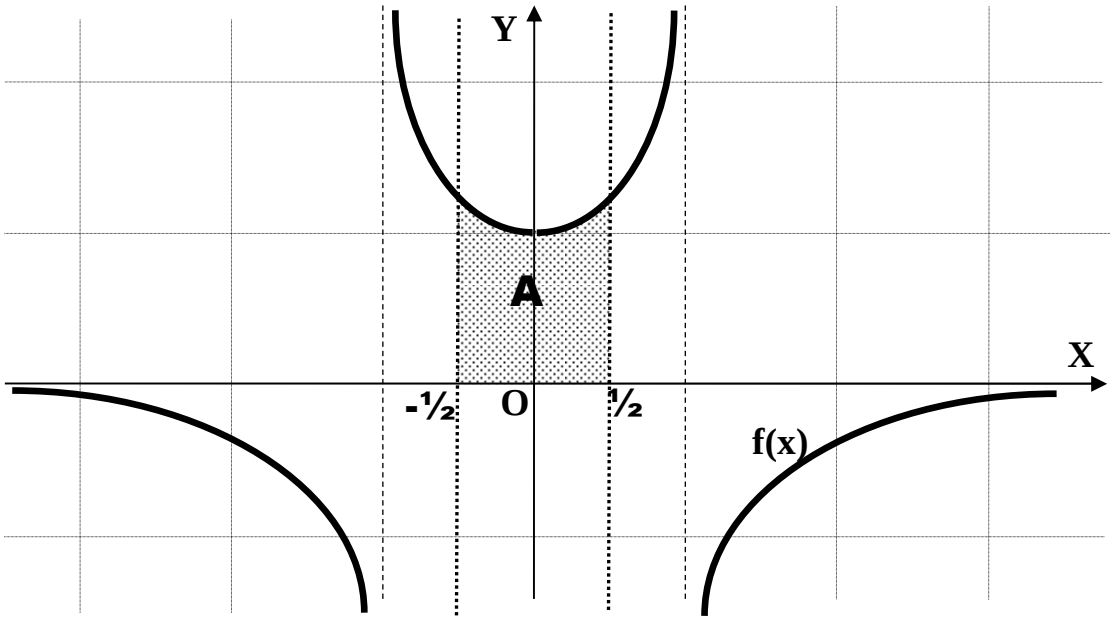
La situación gráfica se ilustra en la siguiente figura:



$$A = \int_1^e L\,x \cdot dx = [x(L\,x - 1)]_1^e = [e(L\,e - 1)] - [1(L1 - 1)] = e(1 - 1) - (0 - 1) = 0 + 1 = \underline{\underline{1\,u^2 = A}}$$

****

2º) Calcular el área limitada por la curva $y=\frac{1}{1-x^2}$, el eje OX y las rectas $x=\frac{1}{2}$ y $x=-\frac{1}{2}$.



Por ser función par, es simétrica con respecto aleje Y, por lo cual el área pedida es:

$$A=2\cdot\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-x^2}\cdot dx \quad (*)$$

$$I=\int\frac{1}{1-x^2}\cdot dx=\int\left(\frac{A}{1+x}+\frac{B}{1-x}\right)\cdot dx=\int\frac{A-Ax+B+Bx}{1-x^2}\cdot dx=\int\frac{(-A+B)x+(A+B)}{1-x^2}\cdot dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix}-A+B=0\\ A+B=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow B=\frac{1}{2}\ ;;\ A=\frac{1}{2}\Rightarrow I=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dx}{1+x}+\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dx}{1-x}=\frac{1}{2}\left[L(1+x)-L(1-x)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}L\frac{1+x}{1-x}=\underline{L\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=I}$$

Sustituyendo en (*) el valor de I, resulta:

$$A=2\cdot[I]_0^{\frac{1}{2}}=2\cdot\left[\frac{1}{2}L\frac{1+x}{1-x}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\left[L\frac{1+x}{1-x}\right]_0^{\frac{1}{2}}=L\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-L\frac{1+0}{1-0}=L3-L1=L3-0=\underline{\underline{L3\,u^2=A}}$$

****