PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

JUNIO – 2003

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Instrucciones: Se proponen tres bloques de dos ejercicios cada uno. Se debe elegir un ejercicios de cada uno de los bloques. La puntuación de cada ejercicio está detallada en cada una de las cuestiones o en sus distintas partes. Se permite el uso de la calculadora, pero los resultados, tanto analíticos como gráficos, deberán estar debidamente justificados.

BLOQUE 1

1º) a) Enunciar el Teorema de Rouche-Fröbenius.

b) Discutir, en función de los valores del parámetro a, el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} x + ay + z = a \\ 2x + ay + az = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

---

a)

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones con n incógnitas tenga solución es que coincida el rango de la matriz de los coeficientes con el rango de la matriz ampliada con los términos independientes.

Si el rango es igual al número de incógnitas el sistema es compatible determinado.

Si el rango es menor que el número de incógnitas el sistema es compatible indeterminado.

En el caso particular de un sistema homogéneo, la condición necesaria y suficiente para que un sistema sea compatible es que el rango de la matriz de los coeficientes sea menor que el número de incógnitas. La condición necesaria y suficiente para que un

sistema de n ecuaciones homogéneas con n incógnitas sea compatible es que el determinante de la matriz de los coeficientes sea nulo.

b)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & a & a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad ;; \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & a \\ 2 & a & a & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & a & a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 + 2 + a^2 - a - a - 2a^2 = 2 - 2a = 2(1-a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{a = 1}$$

$$Para\ a \neq 0 \ \Rightarrow\ Rango\, M = Rango\ M' = 3 = n^o\ incógnitas \ \Rightarrow\ \underline{\underline{Compatible\ \ \det er \min ado}}$$

$$Para\ \ a = 0\ \ el\ \ rango\ \ de\ \ M'\ \ es:$$

$$M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \ \Rightarrow\ Rango = 3$$

$$Para\ a = 0 \ \Rightarrow\ Rango\ M \neq Rango\ M' \ \Rightarrow\ \underline{\underline{Incompatible}}$$

****

2º) a) Encontrar el valor del parámetro a para que los vectores $\overrightarrow{v_1} = (1,\ a,\ 2)$, $\overrightarrow{v_2} = (2,\ a,\ 1)$ y $\overrightarrow{v_3} = (1,\ 1,\ 1)$ sean linealmente dependientes.

b) Si a = 1, escribir el vector $\overrightarrow{w} = (6,\ 0,\ 2)$ como combinación lineal de los vectores anteriores.

---

a)

$$\alpha \cdot \overrightarrow{v_1} + \beta \cdot \overrightarrow{v_2} + \gamma \cdot \overrightarrow{v_3} = 0 \Rightarrow \alpha \cdot (1,\ a,\ 2) + \beta \cdot (2,\ a,\ 1) + \gamma \cdot (1,\ 1,\ 1) = (0,\ 0,\ 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ a\alpha + a\beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} (2) - (1) \Rightarrow (a-1)\alpha + (a-2)\beta = 0 \\ \\ (3) - (1) \Rightarrow \alpha - \beta = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (a-1)\alpha + (a-2)\alpha = 0 \ ;;\ a - 1 + a - 2 = 0 \ ;;\ \underline{\underline{a = \frac{3}{2}}} \\ \\ \rightarrow \alpha = \beta \rightarrow\rightarrow\uparrow \end{array}$$

b)

$$\alpha \cdot \overrightarrow{v_1} + \beta \cdot \overrightarrow{v_2} + \gamma \cdot \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{w} \Rightarrow \alpha \cdot (1,\ 1,\ 2) + \beta \cdot (2,\ 1,\ 1) + \gamma \cdot (1,\ 1,\ 1) = (6,\ 0,\ 2) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \alpha + 2\beta + \gamma = 6 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \Rightarrow \left\| \begin{array}{l} (1) - (2) \rightarrow \underline{\beta = 6} \\ \\ (3) - (2) \rightarrow \underline{\alpha = 2} \end{array}\right. \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0 \ ;;\ 2 + 6 + \gamma = 0 \ ;;\ \underline{\gamma = -8}$$

$$\underline{\underline{\overrightarrow{w} = 2 \cdot \overrightarrow{v_1} + 6 \cdot \overrightarrow{v_2} - 8 \cdot \overrightarrow{v_3}}}$$

****

BLOQUE 2

1º) a) Estudiar si las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$ se cruzan.

b) Hallar la distancia entre las rectas r y s.

---

a)

Un vector director de r es $\vec{u} = (-1, -1, 0)$. Un punto de r es A(1, 1, 2).

Un vector director de s es $\vec{v} = (1, 1, -1)$. Un punto de s es B(0, 1, 2).

Por ser los vectores directores de las rectas linealmente independientes, las rectas r y s se cruzan o se cortan.

Para diferenciar el caso, tendremos en cuenta que si se cortan existe un plano π que contiene a ambas rectas; en caso contrario se cruzan.

$$\pi\left(A;\ \vec{u},\ \vec{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ (x-1)-(z-2)+(z-2)-(y-1) = 0 \ ;;$$

$x - 1 - y + 1 = 0 \ ;;\ \underline{\pi \equiv x - y = 0}$

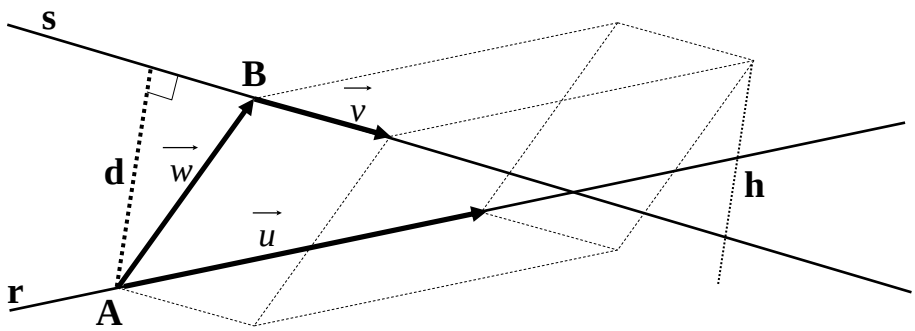
Veamos si el plano π contiene al punto B: $\left.\begin{cases} \pi \equiv x - y = 0 \\ B(0, 1, 2) \end{cases}\right\} \Rightarrow 0 - 1 = 0 \Rightarrow \underline{No}$

<u>Las rectas se cruzan</u>

b)

Se entiende, lógicamente, como distancia entre dos rectas que se cruzan, a la menor distancia entre ambas.

Para una mejor comprensión, hacemos un esquema de la situación.



Para calcular la distancia entre las rectas vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas y otro vector que tiene como origen un punto A de la recta r y como final otro punto B de la recta s, tal como se observa en la figura.

El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observemos que la altura h es igual a la distancia pedida d entre ambas rectas.

Teniendo en cuenta que: A(1, 1, 2), B(0, 1, 2), $\overrightarrow{u} = (-1, -1, 0)$, $\overrightarrow{v} = (1, 1, -1)$, y que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0, 1, 2) - (1, 1, 2) = (-1, 0, 0)$.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\right) = \left|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\right| \cdot h = \left|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\right| \cdot d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\left|\overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\right|}$$

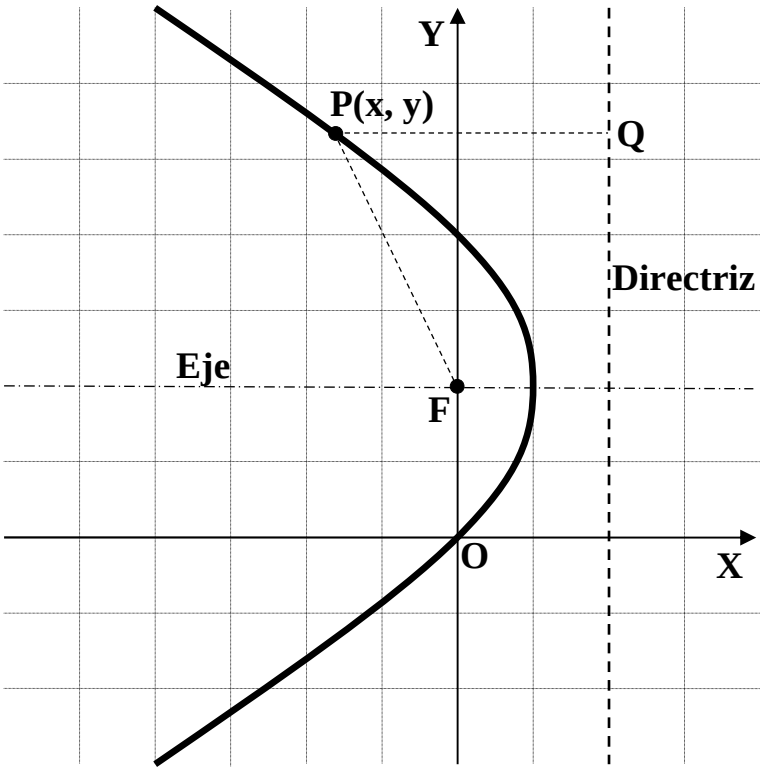
$$d = \frac{\left|\overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right|} = \frac{\left\|\begin{matrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|}{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{matrix}\right\|} = \frac{|-1|}{|i - k + k - j|} = \frac{1}{|i - j|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}\ u = d}}$$

****

2º) Encontrar la ecuación de la parábola de foco F(0, 2) y directriz la recta x = 1.

La situación real es la que se expone a continuación:



$$\overline{PQ} = \overline{PF} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{PQ} = 2 - x \\ \overline{PF} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad 2 - x = \sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4} \ ;;$$

$$4 - 4x + x^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4 \ ;; \ -4x = y^2 - 4y \ ;; \ \underline{\underline{y^2 + 4x - 4y = 0}}$$

****

BLOQUE 3

1º) Para la fabricación de determinado producto se necesita invertir dinero en contratar empleados y comprar máquinas. El dueño de la fábrica ha estimado que si compra x máquinas y contrata y empleados, el número de unidades de producto que podría fabricar vendría dado por la función $f(x) = 90xy^2$. Cada máquina le supone una inversión de 2500 euros y cada contrato de un nuevo empleado otra de 1500 euros. Si el empresario sólo dispone de un presupuesto de 22500 euros para este fin, determinar el número de obreros que debe contratar y el número de máquinas que debe comprar para maximizar la producción.

$$\left.\begin{array}{l} x \to máquinas \\ y \to empleados \end{array}\right\} \Rightarrow 2500x + 1500y = 22500 \;;;\; 25x + 15y = 225 \;;;\; 5x + 3y = 45 \;;;\; y = \frac{45-5x}{3}$$

Sustituyendo en f(x) el valor obtenido para y, queda:

$$f(x) = 90xy^2 = 90x \cdot \left(\frac{45-5x}{3}\right)^2 = 90x \cdot \frac{25}{9} \cdot (9-x)^2 = 250x(9-x)^2$$

$$f'(x) = 250\left[(9-x)^2 + x \cdot 2 \cdot (9-x) \cdot (-1)\right] = 250(9-x)(9-x-2x) = \underline{750(9-x)(3-x) = f'(x)}$$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 750(9-x)(3-x) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \underline{x_1 = 9} \\ \underline{x_2 = 3} \end{cases}$$

$$f'(x) = 750(9-x)(3-x) = 750\left(27 - 9x - 3x + x^2\right) = 750\left(x^2 - 12x + 27\right)$$

$$f''(x) = 750(2x-12) = 1500(x-6) \;\Rightarrow\; \begin{cases} f''(9) = 1500(9-6) > 0 \;\Rightarrow\; \underline{Mínimo} \\ f''(3) = 1500(3-6) < 0 \;\Rightarrow\; \underline{Máximo} \end{cases}$$

El máximo se produce cuando: $\underline{x = 3}$;; $y = \frac{45-5x}{3} \Rightarrow y = \frac{45-15}{3} = \frac{30}{3} = \underline{10 = y}$

<u>Debe comprar 3 máquinas y contratar a 10 obreros</u>

****

2º) Se considera la curva definida por la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$.

a) Dominio de definición y corte con los ejes.

b) Simetrías.

c) Asíntotas.

d) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

e) Extremos de la función.

f) Hacer una representación aproximada de la curva.

---

a) <u>Dominio</u>: $\underline{\underline{D(f)\Rightarrow R-\{2,-2\}}}$

$$Eje\ \ X:\ y=f(x)=0\ \Rightarrow\ x^2=0\ ;;\ x=0\rightarrow \underline{\underline{O(0,\ 0)}}\quad Eje\ \ Y:\ x=0\ ;;\ y=0\rightarrow \underline{\underline{O(0,\ 0)}}$$

b) <u>Simetrías</u>: Se trata de una función par. <u>Simétrica con respecto al eje Y</u>.

c) <u>Asíntotas</u>:

<u>Horizontales</u>: $y=k=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2-4}=1\ \Rightarrow\ \underline{\underline{y=1}}$

<u>Verticales</u>: Valores que anulan el denominador: $\underline{\underline{x=2}}\ ;;\ \underline{\underline{x=-2}}$

Las tendencias de la curva con respecto a la asíntota vertical son las siguientes:

$$Por\ \ la\ izquierda\ \Rightarrow\ \lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}\frac{x^2}{x^2-4}=\frac{4}{0^+}=+\infty\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Tendencia\ \uparrow}}$$

$$Por\ \ la\ derecha\ \Rightarrow\ \lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}\frac{x^2}{x^2-4}=\frac{4}{0^+}=+\infty\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Tendencia\ \uparrow}}$$

Por simetría con respecto a Y, las tendencias son las mismas para x = 2.

<u>Oblicuas</u>: $Pendiente=m=k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x(x^2-4)}=0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{no\ \ tiene}}$

d) <u>Crecimiento y decrecimiento</u>.

$$y'=\frac{2x\cdot(x^2-4)-x^2\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{2x^3-3x-2x^3}{(x^2-4)^2}=\underline{\frac{-8x}{(x^2-4)^2}=y'}$$

$$y' = 0 \Rightarrow -8x = 0 \;;;\; \underline{x = 0} \;\Rightarrow\; \begin{cases} y' > 0 \to x < 0 \Rightarrow \underline{\underline{Creciente : (-\infty,\, -2) \cup (-2,\, 0)}} \\ \\ y' < 0 \to x > 0 \Rightarrow \underline{\underline{Decreciente : (0,\, 2) \cup (2,\, +\infty)}} \end{cases}$$

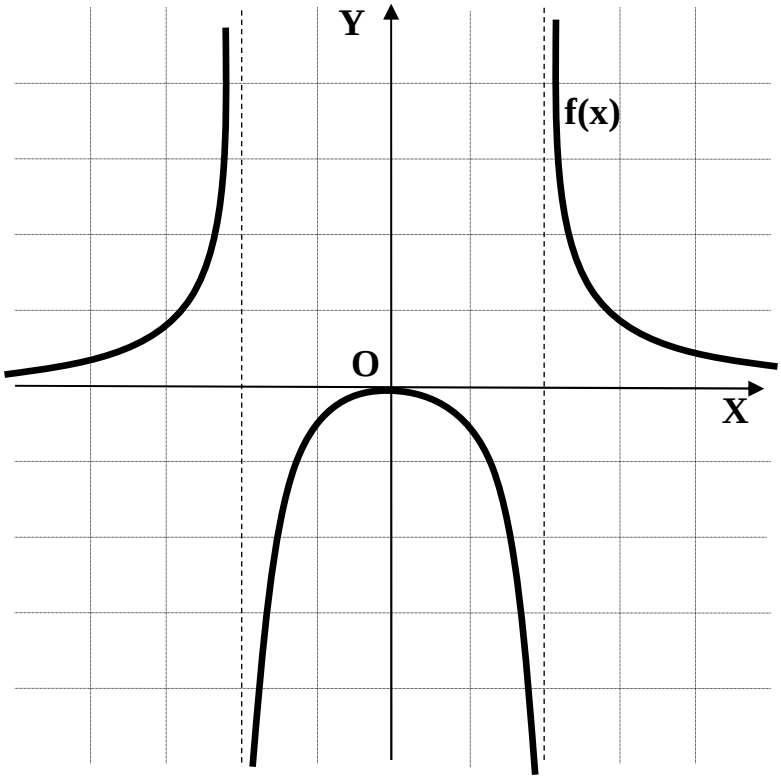
e) <u>Extremos relativos</u>:

$$y' = \frac{-8x}{(x^2-4)^2} \;\Rightarrow\; y'' = -8 \cdot \frac{1 \cdot (x^2-4)^2 - x \cdot 2(x^2-4) \cdot 2x}{(x^2-4)^4} = -8 \cdot \frac{x^2 - 4 - 4x^2}{(x^2-4)^3} =$$

$$= \underline{8 \cdot \frac{3x^2+4}{(x^2-4)^3} = y''} \;\Rightarrow\; y''_{(0)} = 8 \cdot \frac{8}{-64} < 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Máx(0,\, 0)}}$$

$$y'' = 0 \;\Rightarrow\; 3x^2 + 4 = 0 \;;;\; \{x \notin R\} \Rightarrow \underline{\underline{No\ \ tiene\ \ P.\,I.}}$$

f) <u>Representación gráfica</u>:



****

BLOQUE 4

1º) a) Enunciar la Regla de Barrow.

b) Calcular $\int \frac{dx}{x^2-4}$

c) Encontrar el área de la región del plano determinada por la curva $y=\frac{1}{x^2-4}$ y las rectas x = 1, x = -1 e y = - 5.

---

a)

El enunciado de la regle de Barrow es el siguiente:

Si f(x) es una función continua en el intervalo [a, b] y F(x) es una función primitiva de f(x) en dicho intervalo, entonces se verifica la siguiente igualdad:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = F(b)-F(a)$$

b)

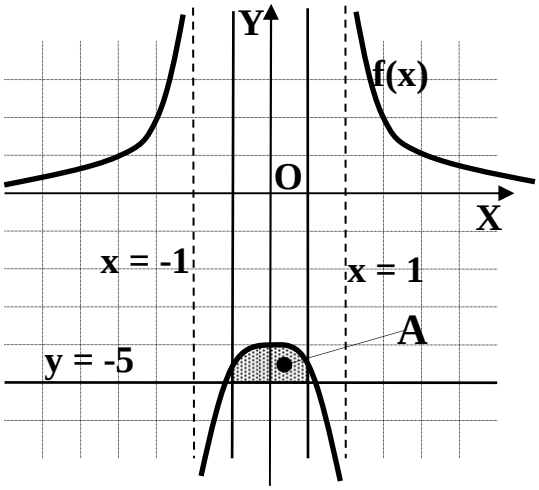
$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \int \frac{dx}{(x+2)(x-2)} = \int \left(\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}\right)\cdot dx = \int \frac{Ax-2A+Bx+2B}{(x+2)(x-2)}\cdot dx =$$

$$= \int \frac{(A+B)x+(-2A+2B)}{(x+2)(x-2)}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} A+B=0 \\ -2A+2B=1 \end{array}\right\| \begin{array}{c} 2A+2B=0 \\ -2A+2B=1 \end{array}\Bigg\| 4B=1 \rightarrow B=\frac{1}{4}\ ;;\ A=-\frac{1}{4}\Bigg\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}\cdot\int\frac{dx}{x+2}+\frac{1}{4}\cdot\int\frac{dx}{x-2} = -\frac{1}{4}\cdot L(x+2)+\frac{1}{4}\cdot L(x-2)+C = \underline{\underline{\frac{1}{4}\cdot L\frac{x-2}{x+2}+C}}$$

c)

La representación gráfica, aproximada, de $y=\frac{1}{x^2-4}$ es la siguiente:



El área A pedida, por estar en zona de ordenadas negativas, puede obtenerse restando al área limitada por la recta horizontal el área limitada por la función, eso si, cambiando los límites de integración:

$$A=\int_{1}^{-1}\left(-5-\frac{1}{x^2-4}\right)\cdot dx=-5\int_{1}^{-1}dx-\int_{1}^{-1}\frac{1}{x^2-4}\cdot dx=-5\cdot[x]_1^{-1}-\left[\frac{1}{4}\cdot L\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right]_1^{-1}=$$

$$=-5\cdot(-1-1)-\frac{1}{4}\cdot\left[L\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right]_1^{-1}=10-\frac{1}{4}\cdot\left[L\left|\frac{-1-2}{-1+2}\right|-L\left|\frac{1-2}{1+2}\right|\right]=10-\frac{1}{4}\cdot\left(L3-L\frac{1}{3}\right)=$$

$$=10-\frac{1}{4}\cdot(L3-L1+L3)=10-\frac{1}{4}\cdot(2L3-0)=10-\frac{1}{2}\cdot L3=10-L\sqrt{3}\cong 10-0'55=\underline{\underline{9'45\ u^2=A}}$$

****

2º) a) Enunciar el Teorema Fundamental del Cálculo Integral.

b) Calcular $\int L\,x^2 \cdot dx$.

c) Encontrar el valor del área determinada por la curva $y = L\,x^2$, el eje de abscisas y las rectas x = 9 y x = 12.

---

a)

El Teorema Fundamental del Cálculo Integral se enuncia del modo siguiente:

Si una función f(x) es continua en [a, b], entonces la función integral $F(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt$ es derivable en [a, b]y F'(x) = f(x) para todo $x \in [a,\ b]$.

b)

$$I = \int L\,x^2 \cdot dx = \int 2 \cdot L\,x \cdot dx = 2 \cdot \int L\,x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = L\,x \to du = \dfrac{1}{x} \cdot dx \\ dx = dv \to v = x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = 2 \cdot \left[L\,x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \right] = 2 \cdot \left[x \cdot L\,x - \int dx \right] = 2 \cdot \left[x \cdot L\,x - x \right] = \underline{\underline{2x(L\,x - 1)}}$$

c)

Teniendo en cuenta que $y = L\,x^2 = 2\,L\,x > 0,\ \forall x \in R,\ \{x > 0\}$, el área pedida es:

$$A = \int_9^{12} L\,x^2 \cdot dx = \left[2x(L\,x - 1) \right]_9^{12} = (24 \cdot L11) - (18 \cdot L8) = 6(4L11 - 3L8) = 6\left(L11^4 - L8^3\right) =$$

$$= 6\,L\frac{11^4}{8^3} = 6\,L\frac{14641}{512} = 6\,L\,28'60 \cong 6 \cdot 3'35 = \underline{\underline{20'12\ u^2 = A}}$$

****