

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE MURCIA****SEPTIEMBRE – 2003**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Observaciones importantes: El alumno deberá responder a una sola de las dos cuestiones de cada uno de los bloques. La puntuación de las dos cuestiones de cada bloque es la misma y se indica en la cabecera del bloque.

BLOQUE 1

1º) a) Estudiar, en función de los valores del parámetro a, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x + ay + z = 5 \\ x + ay + z = 1 \\ 2x + (a+1)y + (a+1)z = 0 \end{cases}$$

b) Resolverlo para $a = 2$, utilizando la Regla de Cramer.

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & a+1 & a+1 \end{pmatrix} ; ; M' = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 & 5 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 2 & a+1 & a+1 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de M es, en función de a, el siguiente:

$$\begin{aligned} |M| &= \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & a+1 & a+1 \end{vmatrix} = 2a(a+1) + (a+1) + 2a - 2a - 2(a+1) - a(a+1) = \\ &= (a+1)(2a+1-2-a) = (a+1)(a-1) = a^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Para } \begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^{\circ} \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Determinado}$$

Veamos que ocurre con el rango de M' para los valores de a que hacen que el rango de M sea dos:

$$\text{Para } a = 1 \text{ es } M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2 = C_3\} \Rightarrow \text{Rango de } M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 10 + 2 - 10 - 4 = 12 - 16 = -4 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango de } M' = 3}$$

$$\text{Para } a = -1 \text{ es } M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2 = -C_3\} \Rightarrow \text{Rango de } M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 10 = -8 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango de } M' = 3}$$

$$\text{Para } \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M \neq \text{Rango } M' \Rightarrow \text{Incompatible}$$

b)

Resolvemos para $a = 2$ por Cramer. El sistema resulta:
$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 5 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{30 + 3 - 15 - 6}{12 + 3 + 4 - 4 - 6 - 6} = \frac{33 - 21}{3} = \frac{12}{3} = \underline{\underline{4 = x}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{3} = \frac{6 + 10 - 2 - 15}{3} = \frac{16 - 17}{3} = -\frac{1}{3} = \underline{\underline{y}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \frac{15 + 4 - 20 - 6}{3} = \frac{19 - 26}{3} = -\frac{7}{3} = z$$

www.yoquieroaprobar.es

2º) a) Encontrar para qué valores de a los vectores $\vec{v}_1 = (2, 2a, 4)$, $\vec{v}_2 = (0, a, 1)$ y $\vec{v}_3 = (1, 1, 1)$ son linealmente independientes.

b) Expresar, si es posible, el vector $\vec{w} = (a, b, c)$, donde b y c son números reales arbitrarios, como combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$.

a)

Los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ son linealmente independientes si el rango que tienen es 3 y son linealmente dependientes si el rango es menor que 3.

$$\text{Rango } \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2a & 4 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2a + 2a - 4a - 2 = \underline{-2 \neq 0, \forall a \in R}$$

Los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ son linealmente independientes $\forall a \in R$.

b)

Como el valor de a puede ser cualquier valor real, hacemos $a = 0$, con lo cual el problema es equivalente a expresar el vector $\vec{w} = (0, b, c)$ en combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1 = (2, 0, 4)$, $\vec{v}_2 = (0, 0, 1)$ y $\vec{v}_3 = (1, 1, 1)$.

$$\vec{w} = \alpha \cdot \vec{v}_1 + \beta \cdot \vec{v}_2 + \gamma \cdot \vec{v}_3$$

$$(0, b, c) = \alpha \cdot (2, 0, 4) + \beta \cdot (0, 0, 1) + \gamma \cdot (1, 1, 1) \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \gamma = 0 \\ \gamma = b \\ 4\alpha + \beta + \gamma = c \end{cases}$$

$$2\alpha + b = 0 \;; \; \underline{\alpha = -\frac{b}{2}} \;; \; \beta = c - 4\alpha - \gamma = c + 2b - b = \underline{b + c = \beta}$$

$$\underline{\underline{\vec{w} = -\frac{b}{2} \vec{v}_1 + (b + c) \vec{v}_2 + b \vec{v}_3}}$$

BLOQUE 2

1º) Encontrar la distancia del punto P(1, 0, 1) a la recta r determinada por los planos π_1 , que pasa por los puntos A(1, 1, 1), B(0, 1, 1) y C(-1, 0, 0) y $\pi_2 \equiv x + y = 2$.

$$\vec{p} = \vec{BA} = A - B = (1, 1, 1) - (0, 1, 1) = (1, 0, 0)$$

$$\vec{q} = \vec{CA} = A - C = (1, 1, 1) - (-1, 0, 0) = (2, 1, 1)$$

$$\pi_1(C; \vec{p}, \vec{q}) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = z + y = 0 \quad ; \quad \underline{\pi_1 \equiv y + z = 0}$$

La expresión de la recta r determinada por unas ecuaciones paramétricas es:

$$r \equiv \begin{cases} \pi_1 \equiv y + z = 0 \\ \pi_2 \equiv x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \underline{y = -\lambda} \quad ; \quad x = 2 - y = \underline{2 + \lambda = x} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Un punto y un vector director de r son A(2, 0, 0) y $\vec{v} = (1, -1, 1)$.

La distancia de un punto a una recta viene dada por la fórmula:

$$d(P, r) = \frac{|\vec{AP} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|}, \text{ siendo A un punto de r y } \vec{v} \text{ un vector director de la recta r.}$$

$$\vec{AP} = P - A = (1, 0, 1) - (2, 0, 0) = \underline{(-1, 0, 1) = \vec{AP}}$$

$$\begin{aligned} d(P, r) &= \frac{|\vec{AP} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{\left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|j + k + i + j|}{\sqrt{3}} = \frac{|i + 2j + k|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}}{\sqrt{3}} = \\ &= \frac{\sqrt{1+4+1}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{\sqrt{2} \text{ u} = d(P, r)}} \end{aligned}$$

2º) Encontrar la distancia del punto P(0, 6, 1) al plano π , determinado por el punto A(0, 1, 3) y la recta r que pasa por los puntos B(1, 0, 1) y C(0, 0, 2).

No es necesario determinar la recta r para hallar la ecuación del plano π , que puede calcularse por los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{CA}$ y por el punto A(0, 1, 3).

$$\vec{u} = \overrightarrow{BA} = A - B = (0, 1, 3) - (1, 0, 1) = (-1, 1, 2)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{CA} = A - C = (0, 1, 3) - (0, 0, 2) = (0, 1, 1)$$

$$\pi(P; \vec{u}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad x - (z-3) - 2x + (y-1) = 0 \quad ; \quad -x - z + 3 + y + 1 = 0$$

$$\underline{\pi \equiv x - y + z - 4 = 0}$$

Sabiendo que la distancia de un punto a una recta viene dada por la fórmula $d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, que aplicada al caso que nos ocupa sería:

$$d(P, \pi) = \frac{|1 \cdot 0 - 1 \cdot 6 + 1 \cdot 1 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|0 - 6 + 1 - 4|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|-9|}{\sqrt{3}} = \frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = \underline{\underline{3\sqrt{3}}} \quad u = d(P, \pi)$$

BLOQUE 3

1º) a) Si f es una función derivable en $x = a$ y $f'(x) = 0$, ¿es seguro que f presenta en a un extremo relativo? Justificar la respuesta.

b) Determinar dos números no negativos cuya suma sea 100 y tales que la suma de sus cuadrados sea: i) Mínima. ii) Máxima.

a)

No es seguro.

Para que una función derivable tenga un extremo relativo en un punto de abscisa $x = a$ es condición necesaria que se anule la primera derivada en ese punto; sin embargo, no es suficiente, ya que tiene que ser distinta de cero la segunda derivada en ese punto.

Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ no tiene un máximo relativo para $x = 0$, que anula la primera derivada, ya que también se anula la segunda derivada para ese punto. Lo que tiene para $x = 0$ es, en este caso, un punto de inflexión.

b)

Sean los números pedidos x e y . ($x > 0$, $y > 0$). $x + y = 100$;; $y = 100 - x$

$$S = x^2 + y^2 = x^2 + (100 - x)^2 = x^2 + 10000 - 200x + x^2 = 2x^2 - 200x + 10000 =$$

$$= 2(x^2 - 100x + 5000) = S(x)$$

$$S'(x) = 2(2x - 100) = 4(x - 50) = S'(x) \quad ;; \quad S''(x) = 4$$

$$i) S \Rightarrow \text{Máxima} \Rightarrow \begin{cases} S'(x) = 0 \rightarrow 4(x - 50) = 0 \quad ;; \quad x - 50 = 0 \quad ;; \quad \underline{x = 50} \\ S''(x) < 0 \Rightarrow S''(50) = 4 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{S \text{ no puede ser máximo}}} \end{cases}$$

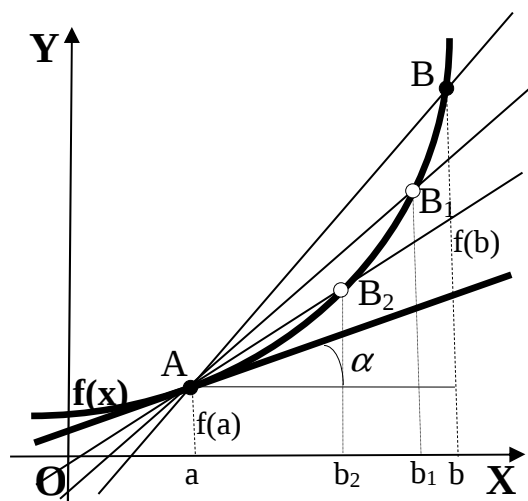
$$ii) S \Rightarrow \text{Mínimo} \Rightarrow \begin{cases} S'(x) = 0 \rightarrow 4(x - 50) = 0 \quad ;; \quad x - 50 = 0 \quad ;; \quad \underline{x = 50} \\ S''(x) < 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mínimo para } x = y = 50}} \end{cases}$$

2º) a) Definición de derivada de una función en un punto.

b) Interpretación geométrica de la derivada.

c) Encontrar las ecuaciones de las tangentes a la curva $y = x^3 - 3x + 2$ que son paralelas a la recta $y = 9x$.

a)



Consideremos la función f de la figura, continua en el punto A , de abscisa a . Se denomina tasa de variación media de un intervalo cerrado $[a, b]$ a la expresión:

$$TVM[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (1)$$

La $TVM[a, b]$ es la tangente o pendiente de la secante de la función f que pasa por los puntos A y B .

La derivada de una función en un punto es la tasa de variación instantánea de la función en ese punto, o sea, es el límite cuando $b \rightarrow a$ de la fracción (1). Si hacemos el cambio de variable $b - a = h$, queda finalmente la expresión de la derivada, que se expresa como sigue:

$$f'(a) = y'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

b)

La interpretación gráfica de la derivada de una función en un punto puede deducirse de la observación de la figura: cuando b tiende a a (h tiende a cero), el punto B tiende a aproximarse infinitamente al punto A , con lo cual la secante tiende a confundirse con la tangente; es decir:

la derivada de una función en un punto es la tangente de la función en ese punto.

c)

Se trata de calcular la tangente a la curva $y = x^3 - 3x + 2$ en los puntos en que la tangente (derivada) es 9, que es la pendiente de la recta $y = 9x$.

$$y' = 3x^2 - 3 = 9 \quad ; \quad 3x^2 = 12 \quad ; \quad x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = 2 \quad ; \quad x_2 = -1$$

$$y_{(2)} = 2^3 - 3 \cdot 2 + 2 = 8 - 6 + 2 = 10 - 6 = 4 \Rightarrow \underline{P(2, 4)}$$

$$y_{(-2)} = (-2)^3 - 3 \cdot (-2) + 2 = -8 + 6 + 2 = 6 - 6 = 0 \Rightarrow \underline{Q(-2, 0)}$$

Sabiendo que la recta que pasa por un punto conocida la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, aplicada a los puntos determinados con una pendiente $m = y'_0 = 9$, sería:

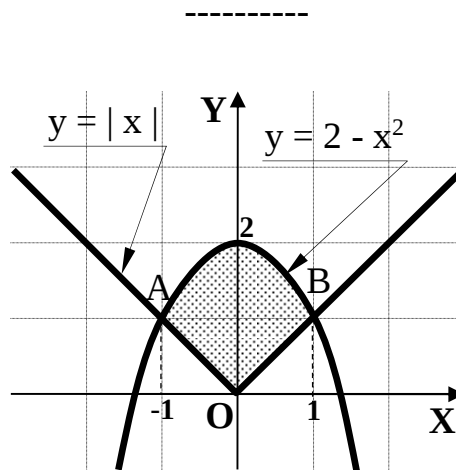
$$t_1 \Rightarrow y - 4 = 9(x - 2) = 9x - 18 \quad ;; \quad \underline{\underline{t_1 \equiv 9x - y - 14 = 0}}$$

$$t_2 \Rightarrow y - 0 = 9(x + 2) = 9x + 18 \quad ;; \quad \underline{\underline{t_2 \equiv 9x - y + 18 = 0}}$$

www.yoquieroaprobar.es

BLOQUE 4

1º) Encontrar el área del recinto determinado por las curvas $y = |x|$ e $y = 2 - x^2$.



Los puntos de corte de ambas funciones son:

$$2 - x^2 = |x|, \forall x \in \mathbb{R}, x < \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} 2 - x^2 = x \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \\ 2 - x^2 = -x \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \rightarrow \text{No válida.} \\ x_2 = -1 \rightarrow \underline{A(-1, 1)} \end{cases} \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \rightarrow \text{No válida.} \\ x_2 = 1 \rightarrow \underline{B(1, 1)} \end{cases}$$

Todas las ordenadas de la parábola son mayores que las de la función $f(x) = |x|$; por otra parte, ambas funciones son simétricas con respecto al eje de ordenadas, por lo tanto, el área pedida es la siguiente:

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot \int_0^1 (2 - x^2 - x) \cdot dx = 2 \cdot \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 2 \cdot \left[\left(2 - \frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} \right) - 0 \right] = 2 \cdot \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = \\ &= 2 \cdot \frac{12 - 2 - 3}{6} = \underline{\underline{\frac{7}{3} u^2 = S}} \end{aligned}$$

2º) Calcular $I = \int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$.

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad ;; \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 2) = 0 \quad ;; \quad \frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 2} = \frac{A(x - 2) + B(x - 3)}{(x - 3)(x - 2)} =$$

$$= \frac{Ax - 2A + Bx - 3B}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(A + B)x + (-2A - 3B)}{x^2 - 5x + 6} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ -2A - 3B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2A + 2B = 0 \\ -2A - 3B = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \underline{-B = 1} \quad ;; \quad \underline{B = -\frac{1}{3}} \quad ;; \quad A + B = 0 \quad ;; \quad \underline{A = -B = \frac{1}{3} = A}$$

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{\frac{1}{3}}{x - 3} + \frac{-\frac{1}{3}}{x - 2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x - 3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x - 2}$$

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = \int \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x - 3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x - 2} \right) \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{x - 3} \cdot dx - \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{x - 2} \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot L(x - 3) - \frac{1}{3} \cdot L(x - 2) + C = \frac{1}{3} \cdot L \frac{x - 3}{x - 2} + C = \underline{\underline{L \sqrt[3]{\frac{x - 3}{x - 2}} + C = I}}$$
