PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

JUNIO – 2004

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Instrucciones: Se proponen tres bloques de dos ejercicios cada uno. Se debe elegir un ejercicios de cada uno de los bloques. La puntuación de cada ejercicio está detallada en cada una de las cuestiones o en sus distintas partes. Se permite el uso de la calculadora, pero los resultados, tanto analíticos como gráficos, deberán estar debidamente justificados.

BLOQUE 1

1º) a) Estudiar, en función de los valores del parámetro a, el siguiente sistema lineal:

$$\left.\begin{array}{r} x + ay - z = a \\ 2ax - y + az = 1 \\ 3x - y + z = 0 \end{array}\right\}$$

b) Resolverlo, si es posible, utilizando la regla de Cramer para el valor a = - 1.

---

a)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2a & -1 & a \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \;;; \; M' = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & a \\ 2a & -1 & a & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2a & -1 & a \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2a + 3a^2 - 3 + a - 2a^2 = a^2 + 3a - 4 = 0$$

$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} \underline{a_1 = 1} \\ \underline{a_2 = -4} \end{cases}$$

$$Para \left\{ \begin{matrix} a \neq 1 \\ a \neq -4 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \ Rang\ M = Rang\ M' = 3 = n^{o}\ inc. \Rightarrow Compatible \ \det er \min ado$$

$$\underline{Para\ \ a = 1} \ \Rightarrow \ M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ ;;\ Rango\ \ de\ \ M' \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \ \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \ \Rightarrow \ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 + 3 + 3 + 1 \neq 0 \ \ \Rightarrow \ \ \underline{Rang\ M' = 3}$$

$$\underline{Para\ \ a = -4} \ \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ -8 & -1 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 & 4 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ ;;\ Rango\ \ de\ \ M' \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \ \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \ \Rightarrow \ \begin{vmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 8 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -32 - 12 - 12 + 1 \neq 0 \ \ \Rightarrow \ \ \underline{Rang\ M' = 3}$$

$$Para \left\{ \begin{matrix} a = 1 \\ a = -4 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \ Rang\ M \neq Rang\ M' \Rightarrow Incompatible$$

b)

$$Para\ \ a = -1 \ \Rightarrow \ M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \ ;;\ M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2 + 3 - 3 - 1 - 2 = \underline{-6 = |M|}$$

.

Resolviendo por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{1+1+1+1}{-6} = -\frac{4}{6} = \underline{\underline{-\frac{2}{3}}} = x$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{1+3+3-2}{-6} = \underline{\underline{-\frac{5}{6}}} = x$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-2-3-3+1}{-6} = \underline{\underline{\frac{7}{6} = z}}$$

****

2º) Dados los siguientes vectores de R^3: $\overrightarrow{e_1} = (1,\ 1,\ 2)$, $\overrightarrow{e_2} = (2,\ 5,\ 1)$, $\overrightarrow{e_3} = (0,\ 1,\ 1)$ y $\overrightarrow{e_4} = (-1,\ 1,\ 0)$, encontrar tres de ellos que formen base en R^3 y escribir el otro como combinación lineal de dicha base.

Para que tres vectores de R^3 formen una base es necesario que el rango del conjunto que determinan sea tres, o sea: que el determinante que constituyen sea distinto de cero.

$$Rango\ \{\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5+4-1-2 = 6 \neq 0 \ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \{\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3}\} = 3}$$

$$\underline{\underline{Los\ vectores\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3}\ \ forman\ base}}$$

$$\overrightarrow{e_4} = \alpha \cdot \overrightarrow{e_1} + \beta \cdot \overrightarrow{e_2} + \gamma \cdot \overrightarrow{e_3} \Rightarrow (-1,\ 1,\ 0) = \alpha \cdot (1,\ 1,\ 2) + \beta \cdot (2,\ 5,\ 1) + \gamma \cdot (0,\ 1,\ 1)\ ;;$$

$$\left.\begin{array}{r} \alpha + 2\beta = -1 \\ \alpha + 5\beta + \gamma = 1 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\alpha = -1 - 2\beta} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -1 - 2\beta + 5\beta + \gamma = 1 \\ -2 - 4\beta + \beta + \gamma = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3\beta + \gamma = 2 \\ -3\beta + \gamma = 2 \end{array}\right\}\ ;;\ 2\gamma = 4\ ;;\ \underline{\underline{\gamma = 2}}$$

$$3\beta + \gamma = 2\ ;;\ 3\beta + 2 = 2\ ;;\ 3\beta = 0\ ;;\ \underline{\underline{\beta = 0}}\ ;;\ \underline{\underline{\alpha = -1}}$$

$$\underline{\underline{\overrightarrow{e_4} = -\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_3}}}$$

****

BLOQUE 2

1º) a) Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta r dada por la intersección de los planos $\pi_1 \equiv x + y - z - 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x - y + z = 0$.

b) Encontrar la distancia del punto P(1, 0, 1) a dicha recta.

---

a)

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{z = \lambda} \Rightarrow \begin{matrix} x + y = 1 + \lambda \\ 2x - y = -\lambda \end{matrix} \Big\} \;;;\; 3x = 1 \;;;\; \underline{x = \frac{1}{3}} \\ \\ x + y = 1 + \lambda \;;;\; \underline{y = 1 + \lambda - x = 1 + \lambda - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \lambda = y} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}}}$$

b)

Sabiendo que la distancia de un punto a una recta es: $d(P,\ r) = \dfrac{\left| \overrightarrow{QP} \wedge \vec{v} \right|}{\left| \vec{v} \right|}$, siendo Q un punto cualquiera de la recta y $\vec{v}$ un vector director de r.

Un punto de r puede ser $Q\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 0\right)$ y un vector director $\vec{v} = (0,\ 1,\ 0)$.

$$\overrightarrow{QP} = Q - P = \left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 0\right) - (1,\ 0,\ 1) = \left(-\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -1\right)$$

$$d(P,\ r) = \frac{\left| \overrightarrow{QP} \wedge \vec{v} \right|}{\left| \vec{v} \right|} = \frac{\begin{Vmatrix} i & j & k \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{\left| -\frac{2}{3}k + i \right|}{\sqrt{1}} = \frac{\left| i - \frac{2}{3}k \right|}{1} = \sqrt{1^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{4}{9}} =$$

$$= \sqrt{\frac{9+4}{9}} = \sqrt{\frac{13}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{9}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{13}}{3}\ \ unidades = d(P,\ r)}}$$

****

2º) a) Demostrar que las rectas $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2 + t \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases}$ se cruzan.

b) Encontrar la distancia entre dichas rectas.

---

a)

En primer lugar expresamos la recta s mediante unas ecuaciones paramétricas:

$$s \equiv \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{z = \lambda} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + y = \lambda \\ 2x + y = -1 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -x - y = -\lambda \\ 2x + y = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{x = -1 - \lambda} \\ 2x + y = -1 \;;; \; y = -1 - 2x = -1 + 2 + 2\lambda = \underline{1 + 2\lambda = y} \end{cases}$$

$$\underline{s \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Vamos a resolver este apartado mediante los vectores directores de ambas rectas.

Un vector director de r es $\vec{u} = (1,\ -1,\ 1)$ y un director de s es $\vec{v} = (-1,\ 2,\ 1)$.

Como puede observarse, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes, lo cual significa que las rectas se cruzan o se cortan; para diferenciar el caso determinamos un tercer vector $\vec{w}$ que tenga como origen, por ejemplo, un punto de r, A(0, 0, 2) y por extremo otro punto de s, B(-1, 1, 0): $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-1,\ 1,\ 0) - (0,\ 0,\ 2) = (-1, 1, -2)$.

Si los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ están en el mismo plano las rectas r y s se cortan; en caso contrario se cruzan, o sea, si el rango de $\{\vec{u},\ \vec{v}\ y\ \vec{w}\}$ es 2 las rectas se cortan y si el rango es 3 se cruzan:

$$Rango\ de\ \{\vec{u},\ \vec{v}\ y\ \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 1 + 1 + 2 - 1 + 2 = 5 - 6 = -1 \neq 0 \Rightarrow$$

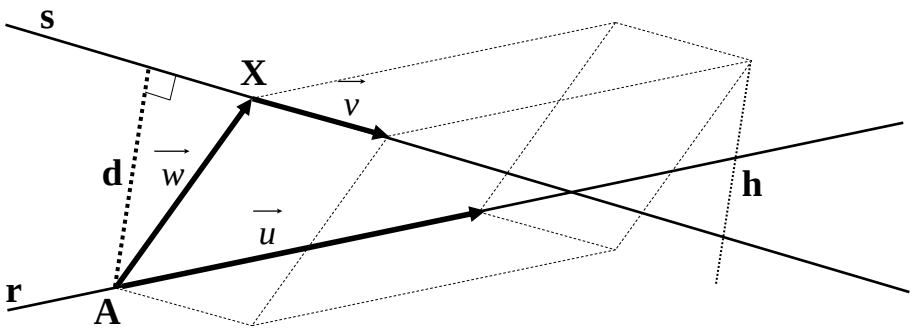
$$\Rightarrow \underline{\underline{Rango\ de\ \{\vec{u},\ \vec{v}\ y\ \vec{w}\} = 3}}$$

<u>En efecto, las rectas r y s se cruzan.</u>

b)

Se entiende como distancia entre dos rectas que se cruzan, a la menor distancia entre ambas.

Para una mejor comprensión, hacemos un esquema de la situación.



Para calcular la distancia entre las rectas vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas y otro vector que tiene como origen un punto A de la recta r y como final otro punto B de la recta s, tal como se observa en la figura.

El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observemos que la altura h es igual a la distancia pedida d entre ambas rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \vec{u} \cdot \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right) = \left|\vec{v} \wedge \vec{w}\right| \cdot h = \left|\vec{v} \wedge \vec{w}\right| \cdot d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\left|\vec{u} \cdot \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right)\right|}{\left|\vec{v} \wedge \vec{w}\right|}$$

$$d = \frac{\left|\vec{u} \cdot \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right)\right|}{\left|\vec{u} \wedge \vec{v}\right|} = \frac{\left|\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{matrix}\right|}{\left|\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{matrix}\right|} = \frac{\left|-4-1+1+2-1+2\right|}{\left|-i-j+2k-k-2i-j\right|} = \frac{\left|5-6\right|}{\left|-3i-2j+k\right|} =$$

$$= \frac{\left|-1\right|}{\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{9+4+1}} = \frac{1}{\sqrt{14}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{14}}{14}\, u = d}}$$

****

BLOQUE 3

1º) Dada la curva de ecuación $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2}$, se pide:

a) Dominio de definición y corte con los ejes.

b) Simetrías.

c) Asíntotas.

d) Posibles extremos de la función que define la curva.

e) Con los anteriores dados, obtener una representación gráfica aproximada de la curva.

---

a)

Dominio de definición.

$$x^2 + 2 \neq 0,\ \forall x \in R \ \Rightarrow\ \underline{\underline{D(f) \Rightarrow R}}$$

Corte con los ejes.

$$X \ \Rightarrow\ y = 0 \Rightarrow\ x^2 - 1 = 0\ ;;\ (x+1)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ \underline{x_2 = -1} \end{cases} \Rightarrow\ \underline{\underline{A(1,\ 0)\ ;;\ B(-1,\ 0)}}$$

$$Y \ \Rightarrow\ x = 0 \Rightarrow\ y = -\frac{1}{2} \Rightarrow\ \underline{\underline{C\left(0,\ -\frac{1}{2}\right)}}$$

b)

Simetrías.

Por tratarse de una función par, es simétrica con respecto a Y

c)

Asíntotas.

Asíntotas horizontales: son los valores finitos que toma y cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$y = k = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2} = \underline{\underline{1 = y}}$$

Asíntotas verticales: son los valores de x que anulan el denominador : no tiene.

No tiene asíntotas oblicuas. (Para que tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador).

d)

Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$y'=\frac{2x\left(x^2+2\right)-\left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+2\right)^2}=\frac{2x^3+4x-2x^3+2x}{\left(x^2+2\right)^2}=\underline{\frac{6x}{\left(x^2+2\right)^2}=y'}$$

Por ser el denominador siempre positivo, solo estudiamos el numerador.

$$y'=\frac{6x}{\left(x^2+2\right)^2}\ \Rightarrow\ \begin{cases} y'>0\ \Rightarrow\ x>0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Creciente:(0,\ \infty)}} \\ y'<0\ \Rightarrow\ x<0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Decreciente:(-\infty,\ 0)}} \end{cases}$$

Máximos y mínimos.

$$y''=6\frac{\left(x^2+2\right)^2-x\cdot 2\cdot 2x\cdot\left(x^2+2\right)}{\left(x^2+2\right)^4}=6\frac{x^2+2-4x^2}{\left(x^2+2\right)^3}=\underline{6\frac{2-3x^2}{\left(x^2+2\right)^3}=y''}$$

$$y'=0\ \Rightarrow\ \underline{x=0}\ ;;\ y''(0)=\frac{12}{2^3}=\frac{12}{8}>0\Rightarrow Mín.\ ;;\ y(0)=-\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Mínimo\ \Rightarrow\ C\left(0,\ -\frac{1}{2}\right)}}$$

Puntos de inflexión:

$$y''=0\ \Rightarrow\ 6\frac{2-3x^2}{\left(x^2+2\right)^3}=0\ ;;\ 2-3x^2=0\ ;;\ 3x^2=2\ ;;\ x^2=\frac{2}{3}\ \Rightarrow\ \underline{x_1=\frac{\sqrt{6}}{3}}\ ;;\ \underline{x_2=-\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

$$y'''=6\frac{-6x\left(x^2+2\right)^3-\left(2-3x^2\right)\cdot 3\cdot\left(x^2+2\right)^2\cdot 2x}{\left(x^2+2\right)^4}=6\frac{-6x\left(x^2+2\right)-6x\left(2-3x^2\right)}{\left(x^2+2\right)^3}=$$

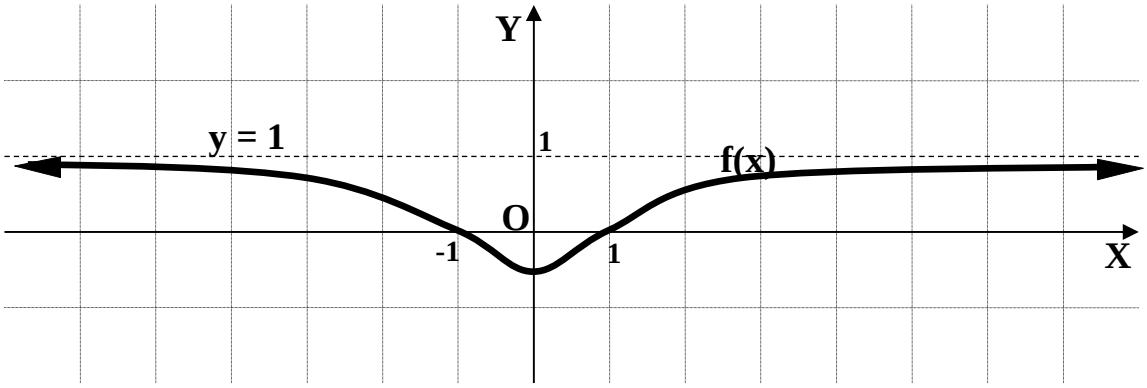
$$=6\frac{-6x^3-12x-12x+18x^3}{\left(x^2+2\right)^3}=6\frac{12x^3-24x}{\left(x^2+2\right)^3}=\underline{\frac{72x\left(x^2-2\right)}{\left(x^2+2\right)^3}=y'''}$$

$$y'''\left(\tfrac{\sqrt{6}}{3}\right)=\frac{72\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}\left(\frac{6}{9}-2\right)}{\left(\frac{6}{9}+2\right)^3}\neq 0\quad\Rightarrow\quad P.\ I.\ \Rightarrow$$

$$y\left(\tfrac{\sqrt{6}}{3}\right)=y\left(-\tfrac{\sqrt{6}}{3}\right)=\frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2-1}{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2+2}=\frac{\frac{2}{3}-1}{\frac{2}{3}+2}=\frac{\frac{2-3}{3}}{\frac{2+6}{3}}=\frac{-1}{8}\Rightarrow \underline{\underline{P.\,I.\left(\frac{\sqrt{6}}{3},\ -\frac{1}{8}\right)}}\ ;;\ \underline{\underline{P.\,I.\left(-\frac{\sqrt{6}}{3},\ -\frac{1}{8}\right)}}$$

e)

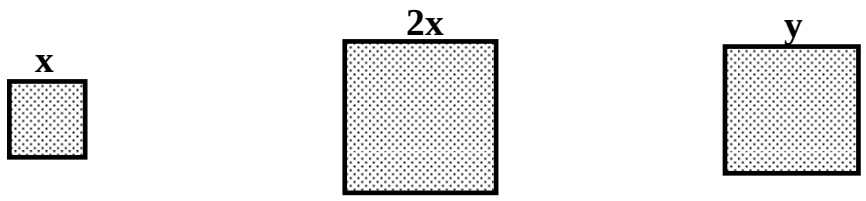
Una representación aproximada de la función es la siguiente:



****

2º) Se dispone de un hilo metálico de 140 metros de longitud. Se quiere dividir en tres trozos de forma que uno de ellos tengo doble longitud que otro y tal que al construir con cada uno de ellos un cuadrado, la suma de las áreas de los tres cuadrados sea mínima. Encontrar la longitud de cada trozo.

Sean los cuadrados formados los representados en las siguientes figuras:



El perímetro o longitud total es:

$$L = 4x + 4 \cdot (2x) + 4y = 12x + 4y = 140 \text{ metros} \;;;\; 3x + y = 35 \;;;\; \underline{y = 35 - 3x}$$

La superficie total, que tiene que ser mínima, es:

$$S_T = S_1 + S_2 + S_3 = x^2 + (2x)^2 + y^2 = x^2 + 4x^2 + (35 - 3x)^2 = \underline{5x^2 + (35 - 3x)^2 = S_T}$$

$$S'_T = 10x + 2 \cdot (35 - 3x) \cdot (-3) = 10x - 6(35 - 3x) = 0 \Rightarrow 10x = 6(35 - 3x) \;;;$$

$$5x = 3(35 - 3x) = 105 - 9x \;;;\; 14x = 105 \;;;\; x = \frac{105}{14} = \frac{15}{2} = \underline{7'5 = x}$$

$$2x = 2 \cdot 7'5 = \underline{15 = 2x} \;;;\; y = 35 - 3x = 35 - 3 \cdot 7'5 = 35 - 22'5 = \underline{12'5 = y}$$

Los lados de los cuadrados de los campos son 7’5 metros, 15 metros y 12’5 metros.

****

BLOQUE 4

1º) Contestar, razonando la respuesta, si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$.

b) $\int_a^b f(x)g(x)dx = + \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$.

c) *Si* $\int_a^b f(x)dx = 0$, *entonces* $a = b$.

d) *Si* $\int_a^b f(x)dx = 0$ *y* $f(x) > 0$, $\forall x \in R$, *entonces* $a = b$.

e) $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

---

a) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$.

Es cierto únicamente en el caso de ser a < b < c.

b) $\int_a^b f(x)g(x)dx = + \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$.

Es falso. Para comprobarlo veamos el siguiente ejemplo: $f(x) = x$;; $g(x) = \frac{1}{x}$.

$$\left.\begin{array}{l} \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b \left(x \cdot \frac{1}{x} \right) \cdot dx = \int_a^b dx = [x]_a^b = \underline{b - a} \\ \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx = \int_a^b x \cdot dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{x} = [x \cdot L\, x]_a^b = \underline{b\, Lb - a\, L\, a} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{b - a \neq b\, Lb - a\, L\, a}}$$

c) *Si* $\int_a^b f(x)dx = 0$, *entonces* $a = b$.

Es cierto. Resultaría $F(b) - F(a) = F(a) - F(a) = 0$

d) *Si* $\int_a^b f(x)dx = 0$ *y* $f(x) > 0$, $\forall x \in R$, *entonces* $a = b$.

Es cierto. (Basado en el apartado anterior).

e) $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

Es cierto. Siempre que f(x) y g(x) sean integrables en el intervalo [a, b].

****

2º) Calcular el área determinada por la curva $y=\frac{x^2}{x^2+1}$, el eje de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=-1$.

La función es continua en su dominio, que es R y se cumple que $y>0,\ \forall x\in R$; es una función par, por lo tanto puede hacerse lo siguiente:

$$S=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{x^2+1}\cdot dx=2\cdot\int_{0}^{1}\frac{x^2+1-1}{x^2+1}\cdot dx=2\cdot\int_{0}^{1}\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)\cdot dx=2\cdot\int_{0}^{1}dx-2\cdot\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2+1}\cdot dx=$$

$$=2\cdot[x]_0^1-2\cdot\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2+1}\cdot dx=2\cdot(1-0)-2\,[arc\ \ tag\ \ x]_0^1=2-2\,(arc\ tag\ 1-arc\ tag\ 0)=$$

$$=2-2\cdot\frac{\pi}{4}-2\cdot 0=2-\frac{\pi}{2}=\frac{4-\pi}{2}\cong \underline{\underline{0'43\ u^2=S}}$$

****