PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

SEPTIEMBRE – 2004

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Instrucciones: Se proponen tres bloques de dos ejercicios cada uno. Se debe elegir un ejercicios de cada uno de los bloques. La puntuación de cada ejercicio está detallada en cada una de las cuestiones o en sus distintas partes. Se permite el uso de la calculadora, pero los resultados, tanto analíticos como gráficos, deberán estar debidamente justificados.

BLOQUE 1

1º) a) Definición de rango de una matriz.

b) Discutir, según los valores del parámetro a el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & a \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Una matriz de tres filas y cuatro columnas verifica que su segunda columna es toda ceros y la tercera columna es igual a la primera más la cuarta. ¿Cuál es el máximo rango que puede tener?

----

a) Todas las matrices, mediante transformaciones elementales, se pueden transformar en matrices escalonadas.

Una matriz escalonada es aquella en la cual, si tiene filas nulas están situadas en la parte inferior de la matriz y, en las filas no nulas, el primer elemento distinto de cero de una fila está situado más a la derecha que el primer elemento diferente de cero de la fila superior.

El rango de una matriz escalonada es el número de filas no nulas.

El rango de una matriz A es el rango de una matriz escalonada equivalente a A.

También puede definirse el rango de una matriz por su determinante, para lo cual es necesario definir menor de orden k de una matriz que es el determinante de cualquier submatriz cuadrada de orden k que se puede formar con los elementos de la matriz.

El rango de una matriz A es el orden del mayor menor que puede formarse que sea distinto de cero.

b)

Vamos a resolver el ejercicio por el procedimiento de Gauss:

$$M=\begin{pmatrix}1 & a & 1 & a\\ 0 & 1 & a & 1\\ 1 & a & 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\{F_4\to F_4-F_1\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & a & 1 & a\\ 0 & 1 & a & 1\\ 0 & 0 & 0 & -a\end{pmatrix}.$$

Es evidente que para a = 0 el rango de la matriz es dos.

Considerando el determinante formado por las tres últimas columnas:

$$\begin{vmatrix}a & 1 & a\\ 1 & a & 1\\ 0 & 0 & a\end{vmatrix}=a^3-a=a\left(a^2-1\right)=0\ \Rightarrow\ \underline{a_1=0}\ ;;\ \underline{a_2=1}\ ;;\ \underline{a_3=-1}$$

$$Conclusión:\ \begin{cases}\underline{\underline{Para\ \ a=0,\ a=1\ \ y\ \ a=-1\ \Rightarrow\ Rango\ \ de\ \ M=2}}\\ \\ \underline{\underline{Para\ \ cualquier\ \ otro\ \ valor\ \ real\ \ de\ \ a\ \Rightarrow\ Rango\ \ de\ \ M=3}}\end{cases}$$

c)

La matriz es de la forma $M=\begin{pmatrix}a & 0 & a+c & c\\ d & 0 & d+e & e\\ f & 0 & f+g & g\end{pmatrix}$. A efectos de calcular su rango se pueden eliminar las columnas segunda y tercera (por ser combinación lineal de la primera y la cuarta), por lo cual, sería equivalente a la matriz $N=\begin{pmatrix}a & c\\ d & e\\ f & g\end{pmatrix}$.

<u>El máximo rango que puede tener es dos.</u>

****

2º) a) Estudiar, según los diferentes valores del número real a, la dependencia lineal de los vectores de: $\overrightarrow{e_1} = (1,\ 0,\ a)$, $\overrightarrow{e_2} = (2,\ a,\ -1)$ y $\overrightarrow{e_3} = (0,\ 1,\ a)$.

b) Para a = 2, escribir el vector $\overrightarrow{v} = (-4,\ -8,\ 3)$ como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ y $\overrightarrow{e_3}$.

----

a)

El rango del determinante que forman es el siguiente.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2 = 0 \Rightarrow \underline{a = -1}$$

$$\underline{\underline{\textit{Los vectores } \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2} \ y \ \overrightarrow{e_3} \textit{ son linealmente independientes } \forall a \in R,\ \{a \neq -1\}.}}$$

b)

$$a = 2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{e_1} = (1,\ 0,\ 2) \\ \overrightarrow{e_2} = (2,\ 2,\ -1) \\ \overrightarrow{e_3} = (0,\ 1,\ 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{v} = \alpha \cdot \overrightarrow{e_1} + \beta \cdot \overrightarrow{e_2} + \gamma \cdot \overrightarrow{e_3} \ ;;$$

$$\overrightarrow{v} = (-4, -8,\ 3) = \alpha \cdot (1,\ 0,\ 2) + \beta \cdot (2,\ 2,\ -1) + \gamma \cdot (0,\ 1,\ 2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = -4 \\ 2\beta + \gamma = -8 \\ 2\alpha - \beta + 2\gamma = 3 \end{cases}$$

De las ecuaciones primera y segunda: $\alpha = -4 - 2\beta$;; $\gamma = -8 - 2\beta$. Sustituyendo estos valores en la tercera ecuación, resulta:

$$2 \cdot (-4 - 2\beta) - \beta + 2 \cdot (-8 - 2\beta) = 3 \ ;; \ -8 - 4\beta - \beta - 16 - 4\beta = 3 \ ;; \ -9\beta = 27 \ ;; \ \underline{\beta = -3}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = -4 - 2\beta = -4 + 6 = \underline{2 = \alpha} \ ;; \ \gamma = -8 - 2\beta = -8 + 6 = \underline{-2 = \gamma}$$

$$\underline{\underline{\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_3}}}$$

****

BLOQUE 2

1º) Encontrar la distancia del punto P(1, -1, 2) al plano π que contiene a la recta r de ecuación $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$ y pasa por el punto Q(2, 1, 3).

Un punto y un vector director de r son A(0, 2, 3) y $\overrightarrow{v} = (1,\ -1,\ 1)$.

El vector $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AQ} = Q - A = (2,\ 1,\ 3) - (0,\ 2,\ 3) = (2,\ -1,\ 0)$ es director del plano pedido π. Otro vector director de π es el vector director de la recta $\overrightarrow{v} = (1,\ -1,\ 1)$, por lo que se puede definir al plano como:

$$\pi(Q;\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ 2(y-1) - (z-3) + 2(z-3) + (x-2) = 0 \ ;;$$

$$(x-2) + 2(y-1) + (z-3) = 0 \ ;;\ x - 2 + 2y - 2 + z - 3 \ ;;\ \underline{\pi \equiv x + 2y + z - 7 = 0}$$

La distancia de un punto a un plano es $d(P,\ \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ que aplicada al punto P(1, -1, 2) y al plano $\pi \equiv x + 2y + z - 7 = 0$ es:

$$d(P,\ \pi) = \frac{|\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 - 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|1 - 2 + 2 - 7|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{|-6|}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \underline{\underline{\sqrt{6}\ u = d(P,\ \pi)}}$$

****

2º) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 7 + 2t \\ z = -t \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ 3x + z - 8 = 0 \end{cases}$ se pide:

a) Demostrar que están contenidas en un plano cuya ecuación se determinará.

b) Encontrar la recta p, perpendicular común a dichas rectas.

----

a)

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$s \equiv \begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ 3x + z - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x = t} \;;;\; \underline{y = 5 - t} \;;;\; \underline{z = 8 - 3t} \Rightarrow \underline{s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 5 - t \\ z = 8 - 3t \end{cases}}$$

Un punto y un vector de cada una de las rectas son los siguientes:

$$r \Rightarrow \begin{Bmatrix} A(4,\ 7,\ 0) \\ \overrightarrow{u} = (1,\ 2,\ -1) \end{Bmatrix} \;;;\; s \Rightarrow \begin{Bmatrix} B(0,\ 5,\ 8) \\ \overrightarrow{v} = (1,\ -1,\ -3) \end{Bmatrix}$$

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 5,\ 8) - (4,\ 7,\ 0) = (-4,\ -2,\ 8)$$

Si los vectores $\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\ y\ \overrightarrow{w}$ son coplanarios, las rectas estarán en un mismo plano y no lo estarían en caso contrario; es decir, que el rango del conjunto de los tres vectores tiene que ser menor de tres:

$$Rando\ \ de\ \left\{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\ \ y\ \ \overrightarrow{w}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ -4 & -2 & 8 \end{vmatrix} = -8 + 2 + 24 + 4 - 6 - 16 = 30 - 30 = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{Rando\ \ de\ \left\{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\ \ y\ \ \overrightarrow{w}\right\} = 2 \Rightarrow Las\ \ rectas\ \ r\ \ y\ \ s\ \ están\ \ en\ \ el\ \ mismo\ \ plano,\ c.q.d.}}$$

La ecuación del plano π que las contiene es la siguiente:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \;;;\; -6(x-4) - (y-7) - z - 2z - (x-4) + 3(y-7) = 0$$

$$-7(x-4) + 2(y-7) - 3z = 0 \;;;\; -7x + 28 + 2y - 14 - 3z = 0 \;;;\; \underline{\underline{\pi \equiv 7x - 2y + 3z - 14 = 0}}$$

b)

La recta p perpendicular común a las dos rectas tiene como vector director un vector que es, al mismo tiempo, perpendicular a las dos rectas; su vector director puede ser cualquiera que sea linealmente dependiente al producto vectorial de los vectores directores de las rectas r y s:

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \equiv \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -6i - j - k - 2k - i + 3j = -7i + 2j - 3k = \underline{(-7,\ 2,\ -3) = \overrightarrow{w}}$$

Existen infinitas rectas perpendiculares al mismo tiempo a las rectas r y s, pero entendemos como perpendicular común aquella que, además de ser perpendicular, se apoya en ambas. Para calcularla determinamos un vector que tenga como origen un punto P de r y como extremo un punto Q de s, que sea linealmente dependiente de $\overrightarrow{w}$.

Un punto genérico de cada una de las rectas son:

$$r \equiv \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 7 + 2t \\ z = -t \end{cases} \Rightarrow \underline{P(4 + t,\ 7 + 2t,\ -t)} \ ;; \ s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 5 - t \\ z = 8 - 3t \end{cases} \Rightarrow \underline{Q(t,\ 5 - t,\ 8 - 3t)}$$

El vector $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (t,\ 5 - t,\ 8 - 3t) - (4 + t,\ 7 + 2t,\ -t) = (-4,\ -2 - 3t,\ 8 - 2t)$; como tiene que ser paralelo a $\overrightarrow{w}$, sus componentes tienen que ser proporcionales:

$$\frac{-4}{-7} = \frac{-1 - 3t}{2} = \frac{8 - 2t}{-3} \Rightarrow -3 \cdot (-1 - 3t) = 2 \cdot (8 - 2t) \ ;; \ 3 + 9t = 16 - 4t \ ;; \ 13t = 13 \ ;; \ \underline{t = 1}$$

Los puntos de cada una de las rectas son: P(5, 9, -1) y Q(1, 4, 5).

La recta pedida p es la que pasa por P y Q:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (-4,\ -5,\ 6) \\ \\ Punto:\ P(5,\ 9,\ -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{p \equiv \begin{cases} x = 5 - 4t \\ y = 9 - 5t \\ z = -1 + 6y \end{cases}}}$$

****

BLOQUE 3

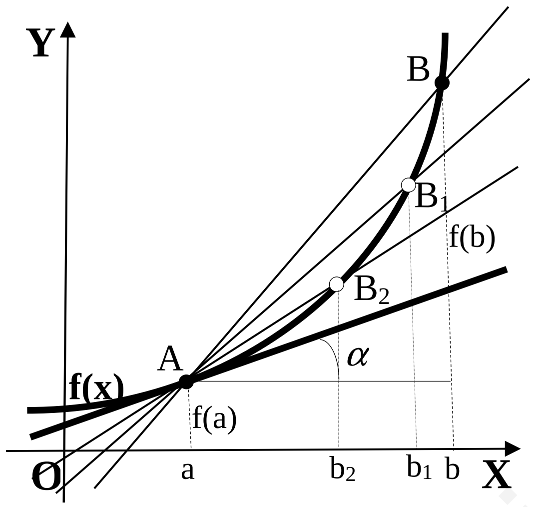
1º) a) Definición de derivada de una función en un punto.

b) Encontrar, utilizando la definición, la derivada de la función $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ en el punto de abscisa $x_0 = 2$.

c) Encontrar la tangente a la curva $y=\frac{x}{x^2+1}$ en el punto $P\left(2,\ \frac{2}{5}\right)$.

----

a)



Consideremos la función f de la figura, continua en el punto A, de abscisa a. Se denomina tasa de variación media de un intervalo cerrado [a, b] a la expresión:

$$TVM\,[a,\,b]=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (1)$$

La TVM[a, b] es la tangente o pendiente de la secante de la función f que pasa por los punto A y B.

La derivada de una función en un punto es la tasa de variación instantánea de la función en ese punto, o sea, es el límite cuando $b \to a$ de la fracción (1). Si hacemos el cambio de variable b - a = h, queda finalmente la expresión de la derivada, que se expresa como sigue:

$$f'(a)=y'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

b)

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1} \quad\Rightarrow\quad f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2+h}{(2+h)^2+1}-\frac{2}{2^2+1}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2+h}{4+4h+h^2+1}-\frac{2}{5}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2+h}{h^2+4h+5}-\frac{2}{5}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{10+5h-2h^2-8h-10}{5h\cdot\left(h^2+4h+5\right)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2h^2-3h}{5h\cdot\left(h^2+4h+5\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{-h(2h+3)}{5h\cdot\left(h^2+4h+5\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{-2h-3}{5\cdot\left(h^2+4h+5\right)}=\frac{-3}{5\cdot 5}=$$

$$=\underline{\underline{-\frac{3}{25}=f'(2)}}$$

c)

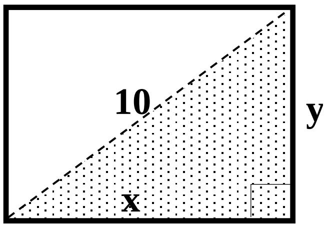
La pendiente es la derivada en ese punto, o sea, la derivada hallada en b).
Sabiendo que la recta que pasa por un punto en función de la pendiente es:

$$y - y_0 = f'(a)(x - x_0) \Rightarrow \; y - \frac{2}{5} = -\frac{3}{25} \cdot (x-2) \;;;\; y - \frac{2}{5} = -\frac{3}{25} \cdot (x-2) \rightarrow \; m.c.m. = 25$$

$$25y - 10 = -3(x-2) \;;;\; 25y - 10 = -3x + 6 \Rightarrow \underline{\underline{Tantente:\; t \equiv 3x + 25y - 16 = 0 +}}$$

****

2º) De entre todos los rectángulos cuya diagonal mide 10 cm, encontrar las dimensiones del de área máxima.



Sea el rectángulo de la figura, cuyo superficie es $S = x \cdot y$.

Para expresar la superficie en función de x considera-mos el triángulo rectángulo sombreado de la figura, en el cual, aplicando el teorema de Pitágoras se tiene:

$$10^2 = x^2 + y^2 \;\;;;\;\; \underline{y = \sqrt{100 - x^2}}$$

Sustituyendo el valor de y en la expresión de la superficie queda:

$$S = x \cdot y = x \cdot \sqrt{100 - x^2} = \sqrt{100x^2 - x^4}$$

Para que el área sea máxima, su derivada tiene que ser cero:

$$S' = \frac{200x - 4x^3}{2\sqrt{100x^2 - x^4}} = \frac{4x\left(50 - x^2\right)}{2x\sqrt{100 - x^2}} = \frac{2\left(50 - x^2\right)}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{2\left(50 - x^2\right)}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \;\;;;\;\; 50 - x^2 = 0 \;\;;;$$

$$x = \sqrt{50} \;\;;;\;\; \underline{x = 5\sqrt{2}}$$

Vamos a justificar que se trata de un mínimo:

$$S' = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} \Rightarrow S'' = -\frac{-4x \cdot \sqrt{100 - x^2} - \left(100 - 2x^2\right) \cdot \dfrac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}}}{\left(\sqrt{100 - x^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{-4x\sqrt{100 - x^2} + \dfrac{x\left(100 - 2x^2\right)}{\sqrt{100 - x^2}}}{100 - x^2} = \frac{-4x\left(100 - x^2\right) + 100x - 2x^3}{\left(100 - x^2\right)\sqrt{100 - x^2}} = \frac{-300x + 2x^3}{\left(100 - x^2\right)\sqrt{100 - x^2}} =$$

$$\underline{= \frac{2x\left(x^2 - 150\right)}{\left(100 - x^2\right)\sqrt{100 - x^2}} = S''}$$

$$S''\left(5\sqrt{2}\right) = \frac{10\sqrt{2} \cdot (50 - 150)}{(100 - 50)\sqrt{100 - 50}} = -\frac{1000\sqrt{2}}{50\sqrt{50}} = -\frac{20}{5} = -4 < 0 \;\Rightarrow\; \underline{\textit{Máximo, c.q.j.}}$$

Para $x = 5\sqrt{2}$ el valor de y es: $y = \sqrt{100 - x^2} = \sqrt{100 - 50} = \sqrt{50} = \underline{5\sqrt{2} = y}$

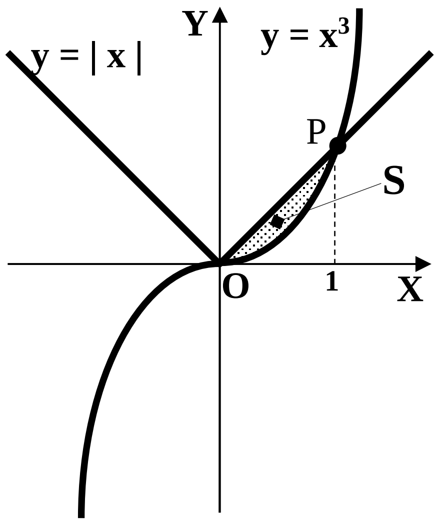
El rectángulo de área máxima es un cuadrado de lado $5\sqrt{2}$ *unidades.*

****

BLOQUE 4

1º) Encontrar el área determinada por las curvas $y = |x|$ e $y = x^3$.

La gráfica aproximada de la situación se expresa en la figura.



La curva $y = |x|$ se puede redefinir de la siguiente forma:

$$y = \begin{cases} -x & si \quad x \leq 0 \\ +x & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Según lo anterior, el punto de corte de las gráficas es:

$$|x| = x^3 \Rightarrow x = x^3 \;\;;;\;\; x^3 - x = 0 \;\;;;\;\; x\left(x^2 - 1\right) = 0$$

Para $x \geq 0$ los puntos son O(0, 0) y P(1, 1).

La superficie pedida, teniendo en cuenta que las ordenadas de la recta son iguales o mayores que las de la curva en el intervalo de la superficie, es:

$$S = \int_0^1 \left(x - x^3\right) \cdot dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right] = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) - 0 = \frac{2-1}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{4}\ u^2 = S}}$$

****

2º) Calcular la integral $I=\int \frac{x}{x^2-4}\cdot dx$. ¿Qué representa geométricamente el valor de dicha integral?

$$I=\int \frac{x}{x^2-4}\cdot dx \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x^2-4=t \\ 2x\cdot dx=dt \\ x\,dx=\frac{1}{2}dt \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; I=\frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\cdot dt=\frac{1}{2}L\,t+C=\underline{\underline{\frac{1}{2}L\left(x^2-4\right)+C=I}}$$

El valor de la integral representa geométricamente la superficie limitada por la función $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$ y el eje X en cualquier intervalo perteneciente al dominio de f(x). Como estos intervalos son infinitos, también los son los valores que puede tomar la constante de integración C.

****