PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

SEPTIEMBRE – 2005

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Observaciones importantes: El alumno deberá responder a una sola de las dos cuestiones de cada uno de los bloques. La puntuación de las dos cuestiones de cada bloque es la misma y se indica en la cabecera del bloque.

BLOQUE 1

1º) a) Enunciar el Teorema de Rouché-Fröbenius.

b) Los sistemas $\begin{cases} ax+y+bz=-4 \\ bx+ay+cz=-9 \\ cx+by+az=-11 \end{cases}$ y $\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ x+z=-1 \\ x-z=3 \end{cases}$ son equivalentes. Hallar los valores de a, b y c.

---

a)

El Teorema de Rouché-Fröbenius puede enunciarse del modo siguiente:

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones con n incógnitas tenga solución es que coincida el rango de la matriz de los coeficientes con el rango de la matriz ampliada con los términos independientes.

Si el rango es igual al número de incógnitas el sistema es compatible determinado.

Si el rango es menor que el número de incógnitas el sistema es compatible indeterminado.

En el caso particular de un sistema homogéneo, la condición necesaria y suficiente para que un sistema sea compatible es que el rango de la matriz de los coeficientes sea menor que el número de incógnitas. La condición necesaria y suficiente para que un sistema de n ecuaciones homogéneas con n incógnitas sea compatible es que el determinante de la matriz de los coeficientes sea nulo.

b) Los sistemas $\begin{cases} ax+y+bz=-4 \\ bx+ay+cz=-9 \\ cx+by+az=-11 \end{cases}$ y $\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ x+z=-1 \\ x-z=3 \end{cases}$ son equivalentes. Hallar los valores de a, b y c.

Resolviendo el segundo sistema se tiene:

$\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ x+z=-1 \\ x-z=3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ De las dos últimas ecuaciones se deduce que $\underline{x=1}$;; $\underline{z=-2}$. Sustituyendo estos valores en la primera resulta:

$x-2y+3z=1$;; $1-2y-6=1$;; $-2y=6$;; $\underline{y=-3}$

Sustituyendo los valores de x, y, z en el primer sistema:

$$\begin{cases} ax+y+bz=-4 \\ bx+ay+cz=-9 \\ cx+by+az=-11 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x=1 \\ y=-3 \\ z=-2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a-3-2b=-4 \\ b-3a-2c=-9 \\ c-3b-2a=-11 \end{cases} \begin{Bmatrix} a-2b=-1 \\ -3a+b-2c=-9 \\ -2a-3b+c=-11 \end{Bmatrix}$$

De la primera ecuación: $a=2b-1$. Sustituyendo este valor en las otras dos ecuaciones resulta el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas siguiente:

$$\left.\begin{matrix} -3(2b-1)+b-2c=-9 \\ -2(2b-1)-3b+c=-11 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -6b+3+b-2c=-9 \\ -4b+2-3b+c=-11 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -5b-2c=-12 \\ -7b+c=-13 \end{matrix}\right\}$$

Multiplicando por dos la segunda de las ecuaciones:

$$\left.\begin{matrix} -5b-2c=-12 \\ -14b+2c=-26 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -19b=-38 \text{ ;; } \underline{b=2} \text{ ;; } a=2b-1=4-1=\underline{3=a}$$

$-7b+c=-13$;; $-14+c=-13$;; $\underline{c=1}$

<u>Solución: a = 3, b = 2, c = 1.</u>

****

2º) a) Se consideran los vectores $\overrightarrow{u_1}=(1,\ 1,\ 2)$, $\overrightarrow{u_2}=(-1,\ 1,\ 0)$, $\overrightarrow{v_1}=(0,\ -1,\ 1)$ y $\overrightarrow{v_2}=(1,\ -2,\ 0)$. Demostrar que para todo número real α, el vector $\overrightarrow{w}=(-2a,\ 3a,\ a)$ es combinación lineal de $\overrightarrow{u_1}$ y $\overrightarrow{u_2}$ y también de $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$.

b) Elegir tres vectores linealmente independiente entre los $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ y escribir el otro como combinación lineal de ellos.

---

a)

Para demostrar que los vectores $\overrightarrow{u_1}=(1,\ 1,\ 2)$, $\overrightarrow{u_2}=(-1,\ 1,\ 0)$, $\overrightarrow{w}=(-2a,\ 3a,\ a)$ están en combinación lineal basta con demostrar que el determinante que puede formarse con ellos tiene valor cero; indica que los vectores son coplanarios y, por lo tanto, tienen de rango dos.

$$Rango\ \left\{\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{w}\right\}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2a & 3a & a \end{vmatrix}=a\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=a(1-6+4+1)=a\cdot 0=0$$

$$\underline{\underline{Los\ vectores\ \overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2}\ y\ \overrightarrow{w}\ están\ en\ combinación\ lineal}}$$

$$Rango\ \left\{\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{w}\right\}=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2a & 3a & a \end{vmatrix}=a\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=a(3-4+1)=a\cdot 0=0$$

$$\underline{\underline{Los\ vectores\ \overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2}\ y\ \overrightarrow{w}\ están\ en\ combinación\ lineal}}$$

b)

Tomamos los vectores $\overrightarrow{u_1}=(1,\ 1,\ 2)$, $\overrightarrow{u_2}=(-1,\ 1,\ 0)$, $\overrightarrow{v_1}=(0,\ -1,\ 1)$, por ejemplo; vamos a demostrar que son linealmente independientes, o sea, que no están los tres en un mismo plano y, por eso y no ser nulos, forman una base en la que se puede expresar cualquier vector en el espacio.

$$Rango\ \left\{\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{v_1}\right\}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=1+2+1=3\neq 0\Rightarrow \underline{Son\ l.\ independientes}$$

$$\overrightarrow{v_2}=\alpha\cdot\overrightarrow{u_1}+\beta\cdot\overrightarrow{u_2}+\gamma\cdot\overrightarrow{v_1}=\alpha\cdot(1,\ 1,\ 2)+\beta\cdot(-1,\ 1,\ 0)+\gamma\cdot(0,\ -1,\ 1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(1,\ -2,\ 0)=(\alpha-\beta,\ \alpha+\beta-\gamma,\ 2\alpha+\gamma)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha-\beta=1 \\ \alpha+\beta-\gamma=-2 \\ 2\alpha+\gamma=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to \beta=\alpha-1 \\ \\ \to \gamma=-2\alpha \end{array} \quad \Rightarrow \quad \alpha+(\alpha-1)-(-2\alpha)=-2 \;;;\; \alpha+\alpha-1+2\alpha=-2 \;;;$$

$$4\alpha=-1 \;;;\; \underline{\alpha=-\frac{1}{4}} \;;;\; \beta=\alpha-1=-\frac{1}{4}-1=\underline{-\frac{5}{4}=\beta} \;;;\; \gamma=-2\alpha=-2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=\underline{\frac{1}{2}=\gamma}$$

$$\overrightarrow{v_2}=(1,\ -2,\ 0)$$

$$\underline{\underline{\overrightarrow{v_2}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{u_1}-\frac{5}{4}\overrightarrow{u_2}+\frac{1}{2}\overrightarrow{v_1}}}$$

****

BLOQUE 2

1º) a) Estudiar si las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2 + t \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$ se cruzan.

b) Encontrar la distancia entre dichas rectas.

---

a)

Vamos a realizar el estudio por los vectores directores de las rectas. En primer lugar expresamos la recta r_2 por unas ecuaciones paramétricas:

$$r_2 \equiv \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + y = \lambda - 1 \\ x + 2y = -3 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -x - y = -\lambda + 1 \\ x + 2y = -3 \end{matrix}\right\} \rightarrow \underline{y = -2 - \lambda}$$

$$x + y = \lambda - 1 \;;;\; x = -y - 1 + \lambda = 2 + \lambda + \lambda - 1 = \underline{1 + 2\lambda = x} \Rightarrow \underline{r_2 \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Un punto y un vector de cada una de las rectas son:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2 + t \end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \underline{\vec{u} = (1,\ 1,\ 1)} \\ \underline{A(0,\ 0,\ 2)} \end{matrix}\right\} \quad y \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \underline{\vec{v} = (2,\ -1,\ 1)} \\ \underline{B(1,\ -2,\ 0)} \end{matrix}\right\}$$

Es evidente que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes, ya que:

$\frac{1}{2} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1}$. Esto significa que las rectas se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso determinamos el vector $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ -2,\ 0) - (0,\ 0,\ 2) = (1,\ -2,\ -2)$.

Si el rango de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es dos, entonces son coplanarios y las rectas se cortan; si el rango es tres las rectas se cruzan. Veamos:

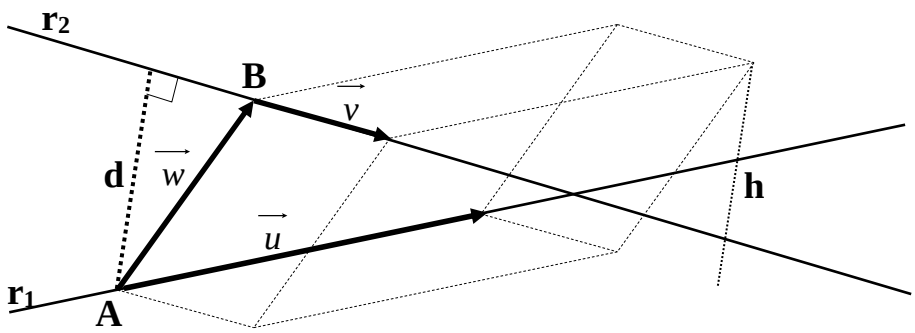
$$Rango\ \{\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 2 + 1 - 4 + 1 + 2 + 4 = 6 \neq 0$$

$$\underline{\underline{Rango\ \{\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\} = 3 \Rightarrow Las\ rectas\ r_1\ y\ r_2\ se\ cruzan}}$$

b)

Se entiende como distancia entre dos rectas que se cruzan, a la menor distancia entre ambas.

Para una mejor comprensión, hacemos un esquema de la situación.



El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observemos que la altura h es igual a la distancia pedida d entre ambas rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \vec{u} \cdot \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right) = \left|\vec{u} \wedge \vec{v}\right| \cdot h = \left|\vec{u} \wedge \vec{v}\right| \cdot d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\left|\vec{u} \cdot \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right)\right|}{\left|\vec{u} \wedge \vec{v}\right|}$$

$$d\left(r_1,\ r_2\right) = \frac{\left|\vec{u} \cdot \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right)\right|}{\left|\vec{u} \wedge \vec{v}\right|} = \frac{\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{matrix}\right\|}{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{matrix}\right\|} = \frac{6}{\left|i + 2j - k - 2k + i - j\right|} = \frac{6}{\left|2i + j - 3k\right|} =$$

$$= \frac{6}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2}} = \frac{6}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{6}{\sqrt{14}} = \frac{6\sqrt{14}}{14} = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{14}}{7}\ u = d\left(r_1,\ r_2\right)}}$$

****

2º) a) Demostrar que las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} 3x - y + 4 = 0 \\ x - z + 4 = 0 \end{cases}$ son paralelas.

b) Encontrar la ecuación del plano π, paralelo al que determinan dichas rectas y que diste de él $\sqrt{6}$ unidades.

---

a)

Si las rectas son paralelas, sus vectores directores tienen que ser linealmente dependientes (paralelos).

Una expresión de la recta s mediante ecuaciones paramétricas es:

$$s \equiv \begin{cases} 3x - y + 4 = 0 \\ x - z + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3x - y = -4 \\ \underline{x = -4 + \lambda} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3(-4 + \lambda) - y = -4 \;;;$$

$$-12 + 3\lambda - y = -4 \;;;\; \underline{y = -8 + 3\lambda} \;\Rightarrow\; \underline{s \equiv \begin{cases} x = -4 + \lambda \\ y = -8 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Un punto y un vector de cada una de las rectas son:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \underline{\vec{u} = (1,\ 3,\ 1)} \\ \\ \underline{A(1,\ 3,\ 3)} \end{matrix}\right\} \; y \; s \equiv \begin{cases} x = -4 + \lambda \\ y = -8 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \underline{\vec{v} = (1,\ 3,\ 1)} \\ \\ \underline{B(-4,\ -8,\ 0)} \end{matrix}\right\}$$

Es evidente que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes, ya que son iguales.

<u>Las rectas r y s son paralelas, c.q.d.</u>

b)

El plano π' que determinan las rectas es el que tiene como vectores directores al vector de las rectas, $\vec{u}$ y a $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-4,\ -8,\ 0) - (1,\ 3,\ 3) = (-5,\ -11,\ -3)$.

$$\pi'\left(A;\ \vec{u},\ \vec{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 11 & 3 \end{vmatrix} = 0 \;;;$$

$$9(x-1) + 5(y-3) + 11(z-1) - 15(z-1) - 11(x-1) - 3(y-1) = 0 \;;;$$

$$-2(x-1) + 2(y-3) - 4(z-1) = 0 \;;;\; -2x + 2 + 2y - 6 - 4z + 4 = 0 \;;;\; \underline{\pi' \equiv x - y + 2z = 0}$$

Como el plano π' pasa por el origen de coordenadas (carece de término indepen-

diente), el plano buscado, que en realidad son dos, son los planos $\pi_1 \;\; y \;\; \pi_2$, paralelos al plano π' y que distan 6 unidades del origen.

Los planos $\pi_1 \;\; y \;\; \pi_2$ tiene por ecuación $x - y + 2z + D = 0$.

Sabiendo que la distancia de un plano al origen de coordenadas viene dado por la fórmula $d(O,\ \pi) = \dfrac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, sería:

$$d(O,\ \pi) = \frac{D}{\pm\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \sqrt{6} \;\; ;; \;\; \frac{D}{\pm\sqrt{1+1+4}} = \sqrt{6} \;\; ;; \;\; \frac{D}{\pm\sqrt{6}} = \sqrt{6} \;\; ;; \;\; \underline{D = \pm 6}$$

$$\underline{\underline{Los \;\; planos \;\; son \;\; \pi_1 \equiv x - y + 2z + 6 = 0 \;\; y \;\; \pi_2 \equiv x - y + 2z - 6 = 0}}$$

****

BLOQUE 3

1º) La curva de ecuación $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos A(1, 0) y B(0, -1) y tiene un mínimo para x = 2. Se pide:

a) Encontrar los valores de a, b y c.

b) Representar de forma aproximada dicha curva.

---

a)

Por pasar por A(1, 0) $\Rightarrow y_{(1)} = 0 \rightarrow 0 = 1 + a + b + c$;; $\underline{a + b + c = -1}$ (1)

Por pasar por B(0, -1) $\Rightarrow y_{(0)} = -1 \rightarrow -1 = c$;; $\underline{c = -1}$

Si tiene un mínimo para x = 2, la primera derivada tiene que anularse para este valor:

$y' = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow y'_{(2)} = 0 \rightarrow 3 \cdot 2^2 + 4a + b = 0$;; $\underline{4a + b = -12}$ (2)

Teniendo en cuenta el valor de c, la expresión (1) resulta: $\underline{a + b = 0}$ (3)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (2) y (3):

$$\left.\begin{array}{l} 4a + b = -12 \\ a + b = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \underline{b = -a} \Rightarrow 4a - a = -12 \;;;\; 3a = -12 \;;;\; \underline{a = -4} \;;;\; \underline{b = 4}$$

$$\underline{\underline{y = x^3 - 4x^2 + 4x - 1}}$$

b)

Tratándose de una función polinómica, es continua en su dominio, que es R. Los puntos de corte con los ejes son:

Eje X: y = 0 $\rightarrow x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$.

Resolviendo por Ruffini:

	1	-4	4	-1
1		1	-3	1
	1	-3	1	$\boxed{0}$

Resolviendo la ecuación de segundo grado resultante: $x^2 - 3x + 1 = 0$.

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \cong 2'62 \rightarrow \underline{C(2'62,\ 0)} \\ x_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \cong 0'38 \rightarrow \underline{D(-0'38,\ 0)} \end{cases}$$

Como al eje Y solamente puede cortarlo en un punto, éste es B(0, -1).

Vamos a determinar si tiene otros máximos y mínimos:

$$y' = 3x^2 - 8x + 4 \ ;;\ \ y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0 \ ;;$$

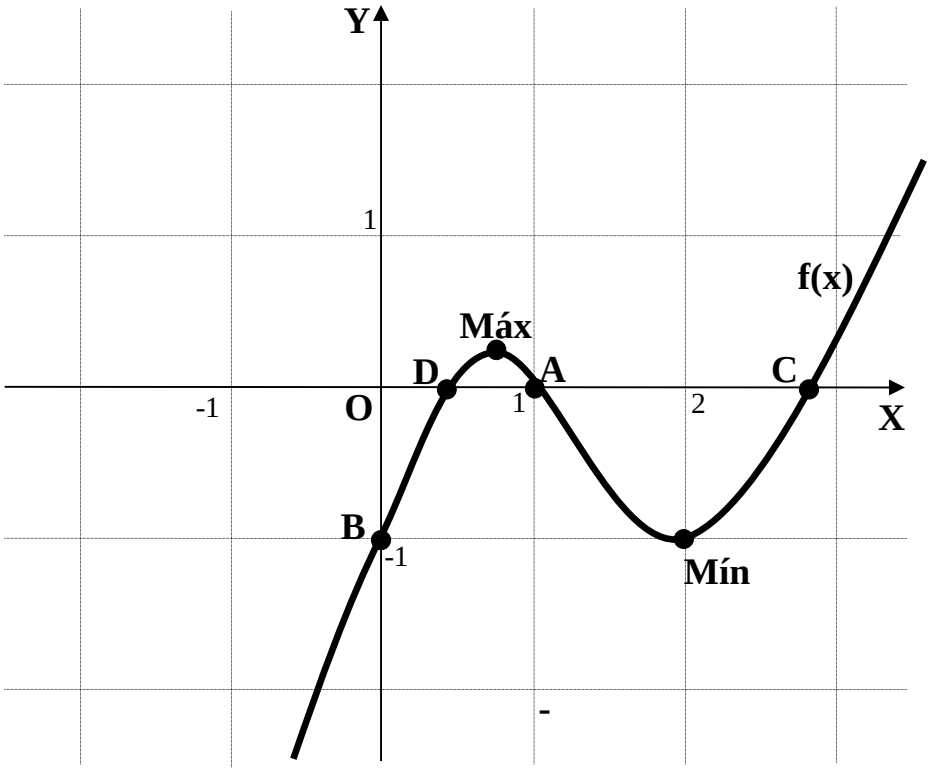
$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{6} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{8 \pm 4}{6} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \rightarrow \textit{Mínimo} \rightarrow (\textit{de los datos}) \\ x_2 = \dfrac{2}{3} \rightarrow \textit{Máximo} \rightarrow (\textit{necesariamente}) \end{cases}$$

$$y = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$$

$$y_{(2)} = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 1 = 8 - 16 + 8 - 1 = -1 \Rightarrow \underline{\textit{Mínimo} \Rightarrow C(2,\ -1)}$$

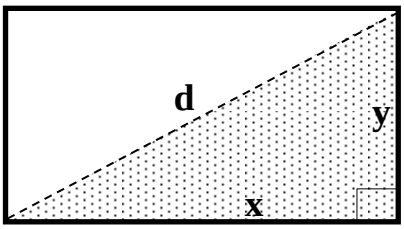
$$y_{\left(\frac{2}{3}\right)} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \cdot \frac{2}{3} - 1 = \frac{8}{27} - \frac{16}{9} + \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{27} \Rightarrow \underline{\textit{Máximo} \Rightarrow D\left(\frac{2}{3},\ \frac{5}{27}\right)}$$

Con los datos anteriores, la representación aproximada es la siguiente:



****

2º) De todos los rectángulos de diagonal $d = 6\sqrt{2}$, encontrar las dimensiones del de perímetro máximo.



Sea el rectángulo de la figura, cuyo perímetro es $p = 2x + 2y$.

Para expresar y en función de x consideramos el triángulo rectángulo sombreado de la figura, en el cual, aplicando el teorema de Pitágoras se tiene:

$$d^2 = x^2 + y^2 \;;;\; y = \sqrt{d^2 - x^2} = \sqrt{\left(6\sqrt{2}\right)^2 - x^2} = \underline{\sqrt{72 - x} = y}$$

Sustituyendo el valor de y en la expresión del perímetro queda:

$$p = 2x + 2y = 2x + 2\sqrt{72 - x^2}$$

Para que el perímetro sea mínimo, su derivada tiene que ser cero:

$$p' = 2 + 2 \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{72 - x^2}} = 2 - \frac{2x}{\sqrt{72 - x^2}} = 0 \;\Rightarrow\; 2 = \frac{2x}{\sqrt{72 - x^2}} \;;;\; \sqrt{72 - x^2} = x \;;;$$

$$72 - x^2 = x^2 \;;;\; 72 = 2x^2 \;;;\; x^2 = 36 \;;;\; \underline{x = 6}$$

Vamos a justificar que se trata de un mínimo:

$$p' = 2 - \frac{2x}{\sqrt{72 - x^2}} \;\Rightarrow\; p'' = 0 - \frac{2 \cdot \sqrt{72 - x^2} - 2x \cdot \dfrac{-2x}{2\sqrt{72 - x^2}}}{\left(\sqrt{72 - x^2}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{72 - x^2} + \dfrac{2x^2}{\sqrt{72 - x^2}}}{72 - x^2} =$$

$$= -\frac{2\left(72 - x^2\right) + 2x^2}{\left(72 - x^2\right)\sqrt{72 - x^2}} = -\frac{144 - 2x^2 + 2x^2}{\left(72 - x^2\right)\sqrt{72 - x^2}} = \underline{-\frac{144}{\left(72 - x^2\right)\sqrt{72 - x^2}} = p''}$$

$$p''(6) = -\frac{144}{\left(72 - 6^2\right)\sqrt{72 - 6^2}} = -\frac{144}{36\sqrt{36}} = -\frac{4}{6} < 0 \;\Rightarrow\; \underline{\textit{Máximo, c.q.j.}}$$

Para x = 6 el valor de y es: $y = \sqrt{72 - x^2} = \sqrt{72 - 36} = \sqrt{36} = \underline{6 = y}$

El perímetro es máximo para un cuadrado de lado 6 unidades.

****

BLOQUE 4

1º) Encontrar el área del recinto determinado por las curvas $y = \dfrac{2}{1+x^2}$ e $y = x^2$.

Los puntos de corte de las curvas se obtienen igualando sus valores:

$\dfrac{2}{1+x^2} = x^2$;; $2 = x^2 + x^4$;; $x^4 + x^2 - 2 = 0$. Resolviendo esta ecuación bicuadrada, para lo cuál hacemos el cambio de variable $x^2 = z$:

$$z^2 + z - 2 = 0 \;;;\; z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = -2 \end{cases}$$

Las únicas raíces reales se obtienen para z =1. Deshaciendo el cambio de variable:

$$x^2 = z = 1 \;;;\; x = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow y_1 = 1 \Rightarrow \underline{A(1,\ 1)} \\ x_2 = -1 \rightarrow y_2 = 1 \Rightarrow \underline{B(-1,\ 1)} \end{cases}$$

Las dos curvas tienen ordenadas positivas en sus dominios, que ambos sor R. Por otra parte, en el intervalo (-1, 1) , todas las ordenadas de la curva $y = \dfrac{2}{1+x^2}$ son mayores que los de la curva $y = x^2$.

Con objeto de facilitar los cálculos podemos considerar que ambas curvas son simétricas con respecto al eje Y (son pares), por lo cual el área pedida es la siguiente:

$$S = \int_0^1 \left(\frac{2}{1+x^2} - x^2 \right) \cdot dx = \int_0^1 \frac{2}{1+x^2} \cdot dx - \int_0^1 x^2 \cdot dx = \int_0^1 \frac{2}{1+x^2} \cdot dx + \int_1^0 x^2 \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot [arc\ tag\ x]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^0 = 2\, arc\ tag\ 1 - 2\ arc\ tag\ 0 + 0 - \frac{1}{3} = 2 \cdot \frac{\pi}{4} - 2 \cdot 0 - \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} = .$$

$$= \underline{\underline{\frac{2\pi - 3}{6}\ u^2 = S}}$$

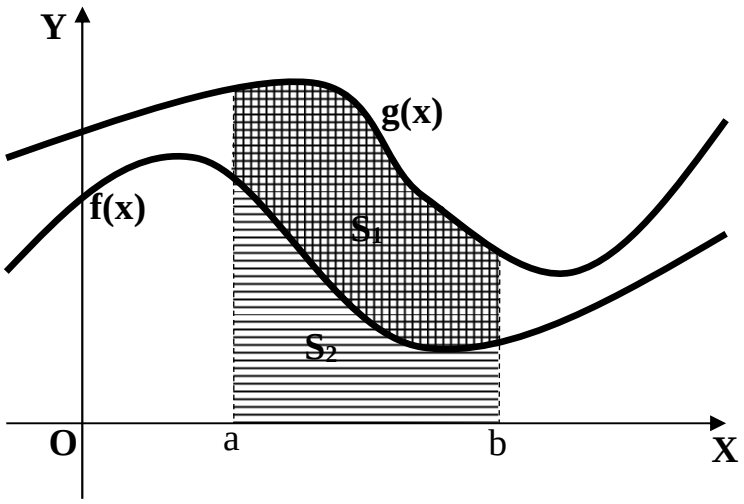
****

2º) a) Justificar geométricamente que si f y g son funciones positivas en el intervalo $[a,\ b]$ y si para toso x en dicho intervalo, $f(x) \le g(x),\ entonces\ \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

b) Demostrar que $\frac{1}{2} \le \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}$.

---

a)



Como puede apreciarse en el dibujo adjunto, la superficie limitada por la gráfica de g(x), que es la suma de las áreas S_1 y S_2, es igual o mayor (en este caso mayor) que la superficie limitada por f(x), que es la superficie de rayado simple denominada S_2, en el intervalo [a, b], donde las ordenadas de g(x) son iguales o mayores que las de f(x).

b)

En el intervalo [0, 1], las funciones $g(x) = \frac{1}{1+x^4}\ \ y\ \ f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ son positivas y se cumple que $f(x) \le g(x),\ \forall x \in [a,\ b]$, por lo cual, según el apartado anterior, se puede concluir que $\int_0^1 f(x)dx \le \int_0^1 g(x)dx$, y siendo:

$$S = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [arc\ tag\ x]_0^1 = arc\ tag\ 1 - arc\ tag\ 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \underline{\frac{\pi}{4} = S}$$

$$Siendo\ \ S = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} \le \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}\ \ y\ \ \frac{\pi}{4} > \frac{1}{2}\ \ se\ \ cumple\ \ que:$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{2} \le \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}\ \ c.q.d.}}$$

****