

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE MURCIA****JUNIO – 2009**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Observaciones importantes: El alumno deberá responder a una sola de las dos cuestiones de cada uno de los bloques. La puntuación de las dos cuestiones de cada bloque es la misma. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico o gráficas.

BLOQUE 1

1º) Calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, según los valores del parámetro.

$$\{C_1, C_2, C_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 4 - 12 + 4 = 0$$

$$\{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 4a - 4 - 2 = 4a - 8 = 4(a - 2) = 0 \Rightarrow \underline{a = 2}$$

$$\{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2a + 2 - 1 = 4 - 2a = 2(2 - a) = 0 \Rightarrow \underline{a = 2}$$

$$\{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 4a + 4 - 12a + 4 + 2 = 16 - 8a = 8(2 - a) = 0 \Rightarrow \underline{a = 2}$$

Para $a \neq 2$ el rango de A es tres y para $a = 2$ el rango de A es dos.

2º) Estudiar si el sistema $\begin{cases} x - y + z = -3 \\ -x - y = 1 \\ x - 2z = -1 \end{cases}$ tiene solución y, en ese caso, resolver por la Regla de Cramer.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

El rango de M es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 + 1 + 2 = 5 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3}$$

Según el Teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{\text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^{\circ} \text{ incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

Resolvemos por la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-6 - 1 - 2}{5} = -\frac{9}{5} = x \quad ; ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-2 + 1 - 1 + 6}{5} = \frac{4}{5} = y$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{1 - 1 - 3 + 1}{5} = -\frac{2}{5} = z$$

BLOQUE 2

1º) Calcule la ecuación del plano π determinado por los puntos P(1, 0, 1), Q(2, 2, 2) y R(1, -1, 0) y la distancia entre el plano π y la recta r determinada por el punto S(1, 0, 0) y el vector $\vec{v} = (1, 1, 0)$.

Dos vectores directores de π son:
$$\begin{cases} \vec{u} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (2, 2, 2) - (1, 0, 1) = \underline{(1, 2, 1)} \\ \vec{v} = \overrightarrow{PR} = R - P = (1, -1, 0) - (1, 0, 1) = \underline{(0, -1, -1)} \end{cases}$$

Considerando, por ejemplo, el punto P(1, 0, 1), la ecuación general de π es:

$$\pi(P; \vec{u}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; ; \quad \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; ;$$

$$2(x-1) + (z-1) - (x-1) - y = 0 \quad ; ; \quad (x-1) - y + (z-1) = 0 \quad ; ; \quad x - 1 - y + z - 1 = 0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x - y + z - 2 = 0}}$$

Vamos a comprobar que la recta r es perpendicular al plano π , como cabe esperar, ya que, si no es así, la recta sería secante al plano y su distancia sería cero.

Para que la recta y el plano sean perpendiculares es necesario que el vector director de la recta y el vector normal al plano sean perpendiculares.

Un vector normal de π es $\vec{n} = (1, -1, 1)$ y el vector director de r es $\vec{v} = (1, 1, 0)$.

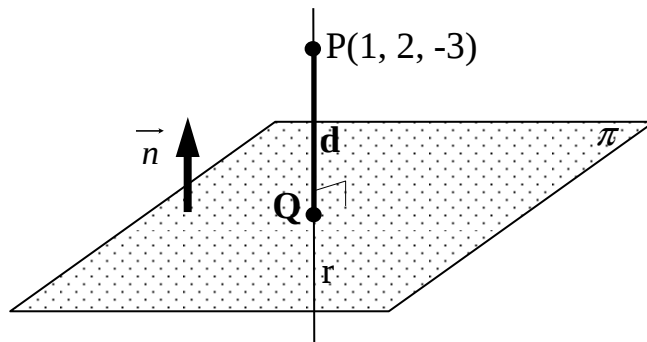
$$\vec{n} \cdot \vec{v} = (1, -1, 1) \cdot (1, 1, 0) = 1 - 1 + 0 = 0 \Rightarrow \underline{\pi \perp r, \text{ como queríamos comprobar.}}$$

La distancia de una recta a un plano del que es paralela es equivalente a la distancia de cualquier punto de la recta al plano. Considerando el punto $S(1, 0, 0) \in r$ y sabiendo que la distancia del punto $P_0(x_0, y_0)$ al plano genérico $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$

viene dada por la fórmula: $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$:

$$d(r, \pi) = d(S, \pi) = \frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|1 - 0 + 0 - 2|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ unidades} = d(r, s)}}.$$

2º) Calcule el punto del plano $\pi \equiv x + y + z = 1$ más cercano al punto $P(1, 2, -3)$. Calcule la distancia entre ambos puntos.



En el gráfico adjunto se puede entender con mayor facilidad el proceso que vamos a seguir para determinar el punto Q que está más próximo del plano π .

Las rectas perpendiculares al plano π constituyen el haz de planos cuyo vector director es el vector normal

al plano: $\vec{n} = (1, 1, 1)$.

La recta r , perpendicular al plano π y que pasa por el punto $P(1, 2, -3)$ dada por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases}$ y cualquiera de sus puntos tiene una expresión general de la forma: $Q'(1 + \lambda, 2 + \lambda, -3 + \lambda)$.

El punto Q , intersección de π y r es la solución del sistema que forman:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + y + z - 1 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow (1 + \lambda) + (2 + \lambda) + (-3 + \lambda) - 1 = 0 \;; \; 3\lambda - 1 = 0 \;; \; \underline{\lambda = \frac{1}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \\ y = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \\ z = -3 + \frac{1}{3} = -\frac{8}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Punto más cercano: } \underline{\underline{Q\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{8}{3}\right)}}$$

Aplicando la distancia entre dos puntos:

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \overline{PQ} = \sqrt{\left(1 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{7}{3}\right)^2 + \left(-3 + \frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \\ &= \sqrt{\frac{3}{9}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ unidades} = d(P, \pi)}} \end{aligned}$$

BLOQUE 3

1º) Dada la función: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$, se pide:

a) Dominio y cortes con el eje X.

b) Estudio de regiones para el signo de $f(x)$.

c) Límites en $+\infty$ y $-\infty$ y estudiar si existen asíntotas horizontales y oblicuas.

d) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos.

e) Representación gráfica aproximada.

a)

Por tratarse de una función polinómica su dominio es $\mathbb{R}$

Los puntos de corte con el eje X se obtienen anulando la función:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \quad ; ; \quad x(x^2 - 4x + 4) = 0 \quad ; ; \quad x(x-2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1 = 0} \rightarrow \underline{O(0, 0)} \\ \underline{x_2 = 2} \rightarrow \underline{A(2, 0)} \end{cases}$$

b)

Para estudiar el signo de la función en sus diferentes intervalos tenemos en cuenta que la función es continua en $\mathbb{R}$ y los puntos de corte con el eje X, que dividen el dominio en tres intervalos: $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, +\infty)$.

Dando un valor sencillo en cada intervalo determinamos el signo de la función:

$$f(-1) = (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) = -1 - 4 - 4 = -9 < 0$$

$$f(1) = 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 = 1 - 4 + 4 = 1 > 0$$

$$f(3) = 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 = 27 - 36 + 12 = 3 > 0$$

$$\underline{\underline{f(x) < 0 \Rightarrow (-\infty, 0) ; ; f(x) > 0 \Rightarrow (0, 2) \cup (2, +\infty)}}$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 4x^2 + 4x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} \right) \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right) = +\infty \cdot 1 = \underline{\underline{+\infty}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 4x^2 + 4x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right) \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right) = -\infty \cdot 1 = \underline{\underline{-\infty}}$$

d)

Una función es creciente en un punto cuando su derivada es positiva en ese punto y es decreciente en caso contrario.

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0 \quad ; ; \quad x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{6} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{8 \pm 4}{6} = \frac{4 \pm 2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Los valores que anulan la primera derivada dividen el dominio de f en tres intervalos donde la función es, alternativamente, creciente o decreciente; los intervalos son los siguientes: $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$ y $(2, +\infty)$.

Considerando el valor $x = 0$ perteneciente al segundo intervalo, resulta:

$$f'(0) = 4 > 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{Función\ creciente: \left(\frac{2}{3}, 2\right)}} \\ \underline{\underline{Función\ decreciente: \left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup (2, +\infty)}} \end{cases}$$

Para que exista un máximo o mínimo relativo es condición necesaria que se anule la primera derivada y que, para esos valores, la segunda derivada sea negativa:

$$f''(x) = 6x - 8 \Rightarrow \begin{cases} f''\left(\frac{2}{3}\right) = 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) - 8 = 4 - 8 = -4 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{Máximo\ para\ x = \frac{2}{3}}} \\ f''(2) = 6 \cdot 2 - 8 = 12 - 8 = 4 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{Mínimo\ para\ x = 2}} \end{cases}$$

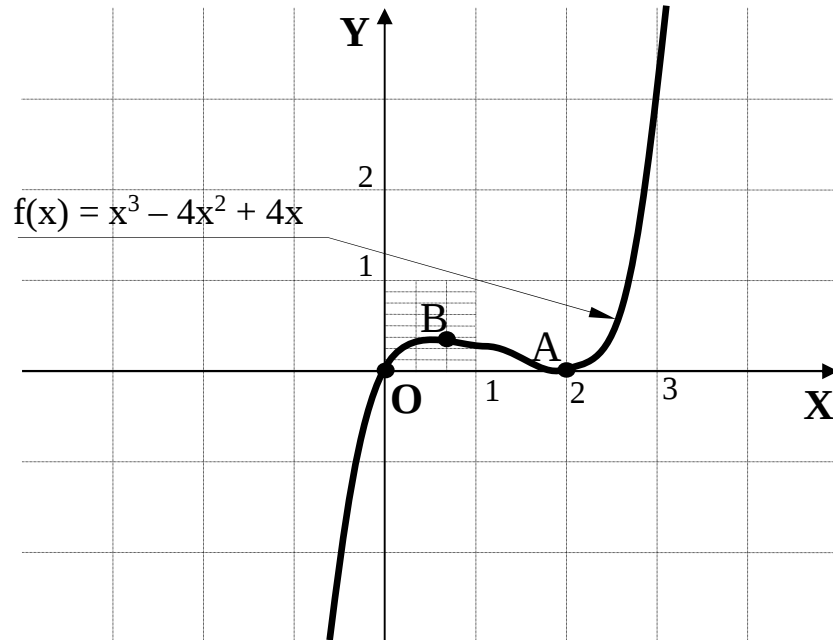
$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{8} - 4 \cdot \frac{9}{4} + 6 = \frac{27}{8} - 3 = \frac{27 - 24}{8} = \underline{\underline{\frac{3}{8}}}$$

$$f(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 = 8 - 16 + 8 = \underline{0}$$

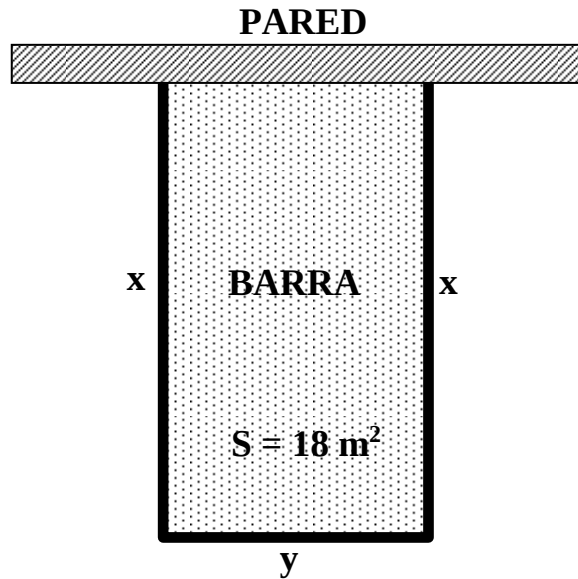
$$\underline{\underline{\text{Máximo relativo: } B\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{8}\right) \;; \; \text{Mínimo relativo: } A(2, 0)}}$$

e)

La representación gráfica de la función es, aproximadamente, la siguiente:



2º) La longitud de la barra de un bar de forma rectangular y apoyada en una pared vale $L = 2x + y$. Calcular las dimensiones de x e y para que la longitud de la barra sea mínima, sabiendo que el área encerrada por la barra debe ser de 18 metros cuadrados.



La longitud de la barra es $L = 2x + y$; para que sea mínima es necesario que su derivada sea nula; para obtenerla es necesario expresar L en función de una sola variable, para lo cual consideramos que la superficie de la barra es $S = x \cdot y = 18 \Rightarrow y = \frac{18}{x}$.

Sustituyendo el valor de y en la expresión de la longitud, resulta:

$$L = 2x + y = 2x + \frac{18}{x} = \frac{2x^2 + 18}{x} = L$$

$$L' = \frac{4x \cdot x - (2x^2 + 18) \cdot 1}{x^2} = \frac{4x^2 - 2x^2 - 18}{x^2} = \frac{2x^2 - 18}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 18 = 0 \;; \; x^2 - 9 = 0 \;;$$

$$x^2 = 9 \Rightarrow \underline{x_1 = 3} \;; \; \underline{x_2 = -3}$$

La solución $x = -3$ carece de sentido lógico. La solución es $x = 3$ metros.

Para justificar que se trata de un mínimo se recurre a la segunda derivada:

$$L'' = \frac{4x \cdot x^2 - (2x^2 - 18) \cdot 2x}{x^4} = \frac{4x^2 - 4x^2 + 36}{x^3} = \frac{36}{x^3} \Rightarrow L''(3) = \frac{36}{3^3} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Mínimo, c.q.j.}}$$

$$y = \frac{18}{3} = \underline{6 \text{ metros} = y}$$

La barra tiene unas dimensiones de 3 x 6 metros.

BLOQUE 4

1º) a) Enuncie el Teorema Fundamental del Cálculo.

b) Calcular la integral $I = \int \frac{x^3}{x^2 + 3x + 2} \cdot dx$.

a)

El enunciado del Teorema Fundamental del Cálculo Integral para funciones continuas es el siguiente: “Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, su función integral asociada $F(x)$ es derivable en dicho intervalo, siendo su derivada $f(x)$, $\forall x \in [a, b]$ y se expresa de la forma $F(x) = \int_a^x f(x) \cdot dx$ ”.

Aunque no se pide, vamos a demostrar el teorema:

De la definición de $F(x)$ se deduce que:

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(x) dx - \int_a^x f(x) dx = \int_a^x f(x) dx + \int_x^{x+h} f(x) dx - \int_a^x f(x) dx = \int_x^{x+h} f(x) dx$$

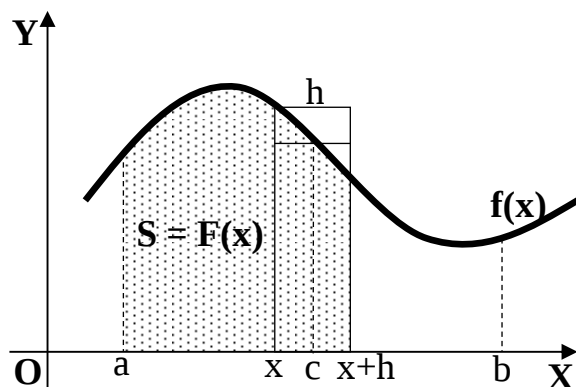
Como la función $f(x)$ es continua en $[a, b]$, por el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral, existe un c perteneciente al intervalo $(x, x+h)$, tal que:

$$\int_x^{x+h} f(x) dx = f(c) \cdot (x+h-x) = f(c) \cdot h, \text{ por lo tanto se puede poner:}$$

$F(x+h) - F(x) = f(c) \cdot h$, (con $h \neq 0$, aunque tiende a cero) o también:

$F(x+h) - F(x) = f(c) \cdot h \Rightarrow f(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$. Tomando límites cuando $h \rightarrow 0$:

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(x) dx \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h} \cdot f(c) \cdot h \right] = \lim_{h \rightarrow 0} f(c)$$



Como c perteneciente al intervalo $(x, x+h)$,

$\lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x)$, por ser $f(x)$ continua en $[a, b]$, por lo cual podemos, finalmente, decir que:

$$\underline{\underline{F'(x) = f(x), \text{ c.q.d.}}}$$

La interpretación gráfica es la que indica la figura.

b)

$$I = \int \frac{x^3}{x^2 + 3x + 2} \cdot dx$$

$$\begin{array}{r} x^3 \\ -x^3 \quad -3x^2 \quad -3x \\ \hline 0 \quad -3x^2 \quad -3x \\ +3x^2 \quad +9x \quad +6 \\ \hline 0 \quad +6x \quad +6 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x^2 + 3x + 2 \\ x - 3 \end{array} \right.$$

$$I = \int \frac{x^3}{x^2 + 3x + 2} \cdot dx = \int \left(x - 3 + \frac{6x + 6}{x^2 + 3x + 2} \right) \cdot dx = \frac{x^2}{2} - 3x + \int \frac{6x + 6}{x^2 + 3x + 2} \cdot dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 3x + I_1 = I \quad (*)$$

Para resolver la integral I_1 descomponemos factorialmente el denominador:

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \quad ; \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \underline{x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)}$$

$$I_1 = \int \frac{6x + 6}{x^2 + 3x + 2} \cdot dx = 6 \int \frac{x+1}{(x+1)(x+2)} \cdot dx = 6 \int \frac{1}{x+2} \cdot dx = \underline{6L|x+2| = I_1}$$

Sustituyendo el valor de I_1 en la expresión (*), queda finalmente:

$$\underline{\underline{I = \frac{x^2}{2} - 3x + 6L|x+2| + C}}$$

2º) Calcule el área encerrada por la gráfica de la función $f(x) = xLx$ para $1 \leq x \leq 2$, la recta $x = 2$ y el eje X.

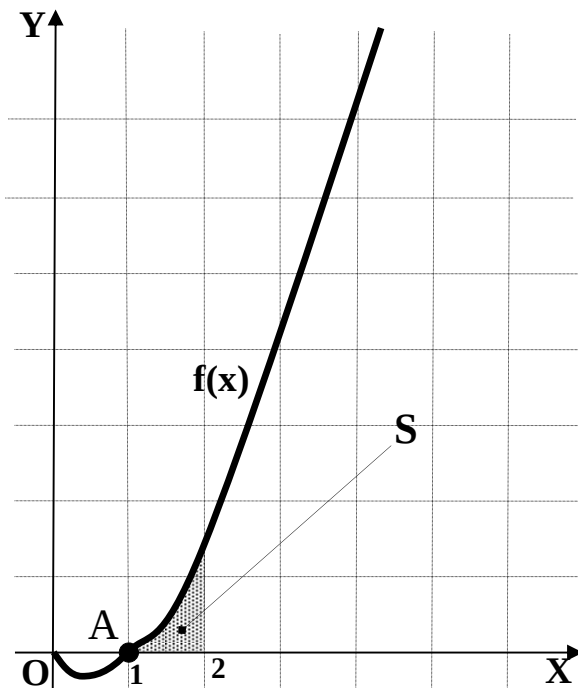
El dominio de la función son los valores reales del intervalo $(0, +\infty)$ y, por tratarse del producto de dos funciones continuas, la función dada es continua en su dominio.

$$f'(x) = 1 \cdot Lx + x \cdot \frac{1}{x} = Lx + 1 \quad ; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow Lx + 1 = 0 \quad ; \quad Lx = -1 \quad ; \quad x = \frac{1}{10}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{1/10} = 10 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Mínimo absoluto para } x = \frac{1}{10}}$$

El punto de corte de $f(x)$ con el eje X es: $f(x) = xLx = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$. Como el valor $x = 0$ no pertenece a la función, el único punto de corte con X es A(1, 0).

Con los datos anteriores podemos hacer un gráfico aproximado de la situación, que es el indicado en la figura.



De la observación de la figura se deduce que el área buscada (sombreada en la figura) es la siguiente:

$$S = \int_1^2 (x \cdot Lx) \cdot dx \quad (*)$$

$$S = \int_1^2 (x \cdot Lx) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Lx = u \rightarrow \frac{1}{x} \cdot dx = dt \\ x \cdot dx = dv \rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \left[Lx \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \right]_1^2 =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} Lx - \frac{1}{2} \int x dx \right]_1^2 = \left[\frac{x^2}{2} Lx - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \left[\frac{x^2}{4} (2Lx - 1) \right]_1^2 = \left[\frac{2^2}{4} (2L2 - 1) \right] - \left[\frac{1^2}{4} (2L1 - 1) \right] =$$

$$= (2L2 - 1) - \frac{1}{4} \cdot (0 - 1) = 2L2 - 1 + \frac{1}{4} = 2L2 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} (8L2 - 3) \cong \frac{1}{4} (5'55 - 3) = 0'64 \text{ u}^2 = S$$
