PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

JUNIO – 2010 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Observaciones importantes: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A

1º) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Para que una matriz sea inversible es condición necesaria que su determinante no sea nulo:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-1-2+2=-1\neq 0 \;\Rightarrow$$ La matriz A tiene inversa.

La matriz traspuesta de A es la siguiente: $A^t=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

El módulo de la matriz A es $|A|=-1$.

$$Adj\ A^t=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow \underline{\underline{A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}}$$

****

2º) Calcular el punto más cercano al punto P(1, 3, 0) de todos los puntos de la recta determinada por el punto Q(-2, 2, 1) y el vector $\overrightarrow{v} = (1,\ 1,\ 1)$. Calcular la distancia del punto P a la recta.

La ecuación de la recta dada por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$.

El haz de planos perpendiculares a r tiene por expresión $\alpha \equiv x + y + z + D = 0$.

De los infinitos planos pertenecientes al haz anterior, el plano π que contiene al punto dado, P(1, 0, 3), tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv x + y + z + D = 0 \\ P(1,\ 0,\ 3) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + 0 + 3 + D = 0\ ;;\ D = -4 \Rightarrow \underline{\pi \equiv x + y + z - 4 = 0}.$$

El punto Q, intersección del plano π con la recta r, es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x + y + z - 4 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow (-2 + \lambda) + (2 + \lambda) + (1 + \lambda) - 4 = 0\ ;;\ -2 + \lambda + 2 + \lambda + 1 + \lambda - 4 = 0\ ;;$$

$$3\lambda - 3 = 0\ ;;\ \lambda - 3 = 0\ ;;\ \lambda = 1 \Rightarrow \left.\begin{cases} x = -2 + 1 = -1 \\ y = 2 + 1 = 3 \\ z = 1 + 1 = 2 \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{Q(-1,\ 3,\ 2)}.$$

<u>El punto más cercano a P(l, 3, 0) de la recta r es Q(-1, 3, 2).</u>

La distancia de P a r es la misma que entre los puntos P y Q:

$$d(P,\ r) = \overline{PQ} = \sqrt{(-1-1)^2 + (3-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (0)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

$$\underline{\underline{d(P,\ r) = 2\sqrt{2}\ \ unidades}}$$

****

3º) Dada la función $f(x)=\sqrt{4+x^2}$, se pide:

a) Dominio y cortes con el eje X.

b) Estudio de simetrías y de regiones para el signo de f(x).

c) Estudiar si existen asíntotas horizontales y oblicuas.

d) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos.

e) Representación gráfica aproximada.

----

a)

Por ser $x^2+4>0,\ \forall x\in R$, el dominio de f(x) es R.

Los puntos de corte con el eje X se obtienen anulando la función, y por ser $x^2+4\neq 0,\ \forall x\in R$, la función f(x) no corta al eje X.

Para x = 0 es $f(0)=+\sqrt{4+0^2}=+\sqrt{4}=2$. El punto de corte con el eje Y es A(0, 2).

b)

Teniendo en cuenta que $f(-x)=\sqrt{4+(-x)^2}=\sqrt{1+x^2}=f(x)$, la función es simétrica con respecto al eje Y.

Para estudiar el signo de la función en sus diferentes intervalos tenemos en cuenta que la función es continua en R y por no cortar al eje X, la función es positiva en R.

c)

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{4+x^2}=+\infty \Rightarrow$$ La función f(x) no tiene asíntotas horizontales.

Las asíntotas horizontales son de la forma $y=mx+n$, siendo:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{4+x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{4+x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}=\sqrt{0+1}=\underline{\pm 1=m}\ .$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4+x^2}-x\right)=\infty-\infty\Rightarrow In\det er.\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4+x^2}-x\right)\left(\sqrt{4+x^2}+x\right)}{\sqrt{4+x^2}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4+x^2-x^2}{\sqrt{4+x^2}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{4+x^2}+x}=\underline{0=n}\Rightarrow \underline{\underline{As\acute{i}ntota\ vertical:\ y=x}}\quad \{Para\ \ m=1\}$$

Por simetría y para m = -1 se obtiene la asíntota oblicua y = -x.

d)

Una función es creciente en un punto cuando su derivada es positiva en ese punto y es decreciente cuando es negativa.

$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{4+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{4+x^2}} \Rightarrow \begin{cases} x<0 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow \underline{\underline{Decreciente:(-\infty,\ 0)}} \\ \\ x>0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow \underline{\underline{Creciente:(0,\ +\infty)}} \end{cases}$$

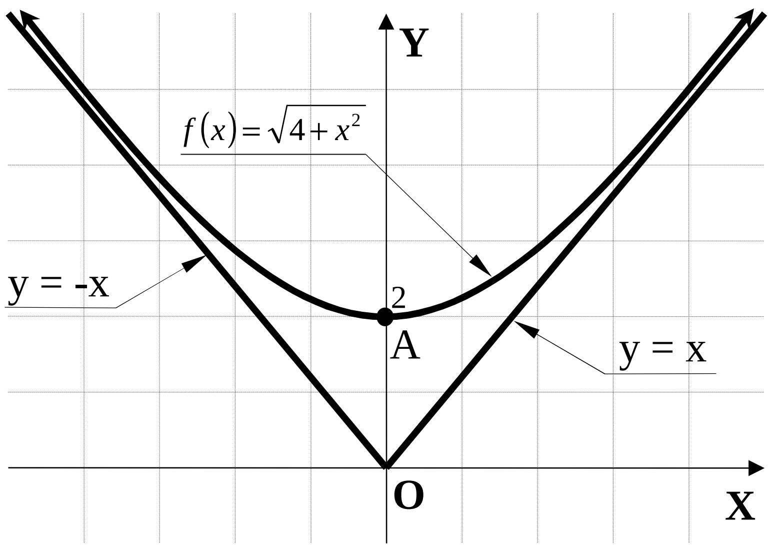
$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}=0 \;;;\; \underline{x=0}$$

$$f''(x)=\frac{1\cdot\sqrt{4+x^2}-x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{4+x^2}}}{\left(\sqrt{4+x^2}\right)^2}=\frac{\sqrt{4+x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}}}{4+x^2}=\frac{4+x^2-x^2}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}=\frac{4}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}$$

$$f''(0)=\frac{4}{(4+0^2)\sqrt{4+0^2}}=\frac{4}{4\cdot 2}=\frac{1}{2}>0 \Rightarrow \underline{Mínimo\ \ para\ \ x=0} \Rightarrow \underline{\underline{Mínimo:\ A(0,\ 2)}}$$

e)

La representación gráfica de la función es, aproximadamente, la siguiente:



****

4º) Calcular el área encerrada por las curvas $f(x)=x^3+x^2+2x+1$ y $g(x)=4x^2+1$.

Los puntos de corte de las dos curvas se obtienen igualando sus expresiones:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3+x^2+2x+1 \\ \\ g(x)=4x^2+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \; f(x)=g(x) \;\Rightarrow\; x^3+x^2+2x+1=4x^2+1 \;\;;;\;\; x^3-3x^2+2x=0 \;\;;;$$

$$x\left(x^2-3x+2\right)=0 \;\;;;\;\; \underline{x_1=0} \;\;;;\;\; x^2-3x+2=0 \;\;;;\;\; x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2} \;\Rightarrow\; \underline{x_2=1} \;\;;;\;\; \underline{x_3=2}$$

Los puntos de corte son A(0, 1), B(1, 5) y C(2, 17).

Para determinar cuál de las curvas tiene mayores ordenadas en cada uno de los dos intervalos que determinan sus puntos de corte basta con calcular los valores numéricos de ambas funciones para un valor correspondiente a uno de los intervalos; por ejemplo el valor $x=\frac{1}{2}$, correspondiente al intervalo determinado por los puntos A y B.

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}+1=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+1+1=\frac{1+2+8+8}{8}=\underline{\frac{19}{8}} \\ \\ g\left(\frac{1}{2}\right)=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+1=1+1=\underline{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \; \underline{f\left(\tfrac{1}{2}\right)>g\left(\tfrac{1}{2}\right)}.$$

$$S=\int_0^1\left[f(x)-g(x)\right]\cdot dx+\int_1^2\left[g(x)-f(x)\right]\cdot dx=\int_0^1\left[\left(x^3+x^2+2x+1\right)-\left(4x^2+1\right)\right]\cdot dx+=$$

$$+\int_1^2\left[\left(4x^2+1\right)-\left(x^3+x^2+2x+1\right)\right]\cdot dx=\int_0^1\left(x^3-3x^2+2x\right)\cdot dx+\int_1^2\left(-x^3+3x^2-2x\right)\cdot dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}\right]_0^1+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{3x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}\right]_1^2=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_0^1+\left[-\frac{x^4}{4}+x^3-x^2\right]_1^2=$$

$$=\left(\frac{1^4}{4}-1^3+1^2\right)-0+\left(-\frac{2^4}{4}+2^3-2^2\right)-\left(-\frac{1^4}{4}+1^3-1^2\right)=\frac{1}{4}-1+1-4+8-4+\frac{1}{4}-1+1=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=$$

$$=\frac{2}{4}=\underline{\underline{\frac{1}{2}\,u^2=S}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Enunciar el teorema de Rouché-Fröbenius. Aplicar dicho teorema para discutir si el sistema $\left.\begin{array}{r} x-y+z=k \\ 3x-3y=0 \\ x+ky+3z=1 \end{array}\right\}$ tiene solución y si la solución es única en función de los posibles valores del parámetro k (no es necesario resolver el sistema).

El Teorema de Rouché-Fröbenius puede enunciarse del modo siguiente:

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones con n incógnitas tenga solución es que coincida el rango de la matriz de los coeficientes con el rango de la matriz ampliada con los términos independientes.

Si el rango es igual al número de incógnitas el sistema es compatible determinado.

Si el rango es menor que el número de incógnitas el sistema es compatible indeterminado.

En el caso particular de un sistema homogéneo, la condición necesaria y suficiente para que un sistema sea compatible es que el rango de la matriz de los coeficientes sea menor que el número de incógnitas. La condición necesaria y suficiente para que un sistema de n ecuaciones homogéneas con n incógnitas sea compatible es que el determinante de la matriz de los coeficientes sea nulo.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & k & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad A'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & k \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & k & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de A en función de k es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & k & 3 \end{vmatrix}=-9+3k+3+9=3k+3=3(k+1)=0 \;;;\; k+1=0 \Rightarrow \underline{k=-1}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ k\neq -1 \Rightarrow Rango\ \ A=Rango\ \ A'=3=n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ Determinado}}$$

$$Para\ \ k=-1 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1=-C_2\} \Rightarrow Rango\ \ A' \Rightarrow \{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -9-3 = -12 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango \ \ A' = 3}$$

$$\underline{\underline{Para \ \ k = -1 \Rightarrow Rango \ \ A = 2 \ ;; \ Rango \ \ A' = 3 \Rightarrow Incompatible}}$$

****

2º) Comprobar que las rectas $r \equiv x+1=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{3}$ y $s \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2-\lambda \end{cases}$ no se cortan y no son paralelas. Calcular la distancia entre ellas.

Los vectores directores de las rectas r y s son $\overrightarrow{v_r}=(1,\ 2,\ 3)$ y $\overrightarrow{v_s}=(1,\ 1,\ -1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por ser $\frac{1}{1} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{3}{-1}$, por lo cual las rectas (que no son paralelas) se cruzan o se cortan. Para diferenciar el caso consideramos un vector $\overrightarrow{w}$ que tenga como origen un punto de r, $A(-1,\ -2,\ 1)$, y como extremo un punto de s, $B(0,\ 1,\ 2)$: $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{AB}=B-A=(0,\ 1,\ 2)-(-1,\ -2,\ 1)=(1,\ 3,\ 1)$.

Si los vectores son coplanarios, las rectas se cortan y, si son linealmente independientes, se cruzan. Tres vectores son coplanarios o no si el rango del determinante que forman es 0 o no, respectivamente.

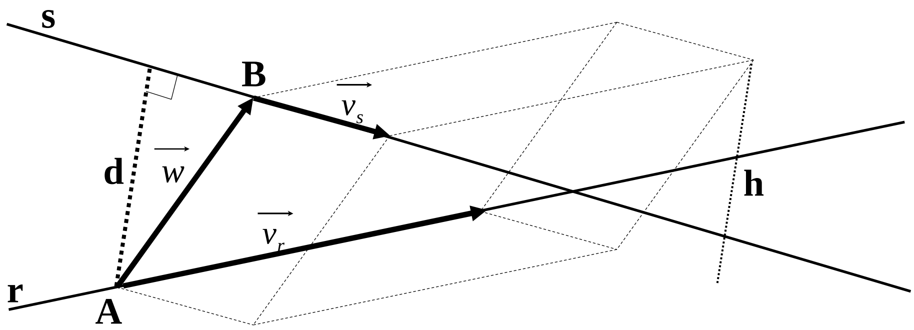
$$Rango\ \left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1+9-2-3+3-2=6 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right\}=3}.$$

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$, $\overrightarrow{v_s}$ y $\overrightarrow{w}$ son linealmente independientes.

<u>Las rectas r y s se cruzan, como debíamos demostrar.</u>

Se entiende como distancia entre dos rectas que se cruzan, a la menor distancia entre ambas.

Para una mejor comprensión, hacemos un esquema de la situación.



Para calcular la distancia entre las rectas vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas y el vector $\overrightarrow{w}$.

El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observemos que la altura h es igual a la distancia pedida d entre ambas rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

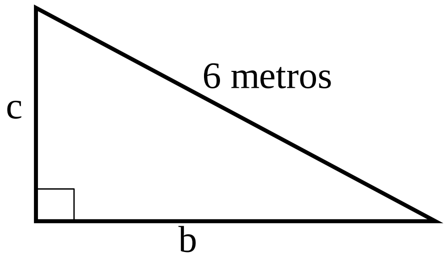
$$V = \overrightarrow{v_r} \cdot \left(\overrightarrow{v_s} \wedge \overrightarrow{w}\right) = \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}\right| \cdot h = \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}\right| \cdot d \;\; \Rightarrow \;\; d = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \cdot \left(\overrightarrow{v_s} \wedge \overrightarrow{w}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}\right|}$$

$$d(r,\ s) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \cdot \left(\overrightarrow{v_s} \wedge \overrightarrow{w}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}\right|} = \frac{\left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{matrix}\right\|}{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{matrix}\right\|} = \frac{6}{\left|-2i + 3j + k - 2k - 3i + j\right|} = \frac{6}{\left|-5i + 4j - k\right|} =$$

$$= \frac{6}{\sqrt{(-5)^2 + 4^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{25+16+1}} = \frac{6}{\sqrt{42}} = \frac{6\sqrt{42}}{42} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{42}}{7}\ u = d(r,\ s)}}$$

****

3º) La vela mayor de un barco tiene forma de triángulo rectángulo. Sabiendo que la hipotenusa debe medir 6 metros, calcular sus dimensiones para que la superficie de la vela sea máxima.



$$b^2 + c^2 = 6^2 = 36 \;;;\; \underline{c = \sqrt{36 - b^2}} \qquad (*)$$

$$S = \frac{b \cdot c}{2} = \frac{b \cdot \sqrt{36 - b^2}}{2} = \underline{\frac{1}{2}\sqrt{36b^2 - b^4} = S}$$

El área será máxima cuando su derivada sea cero:

$$S' = \frac{1}{2} \cdot \frac{72b - 4b^3}{2 \cdot \sqrt{36b^2 - b^4}} = \frac{18b - b^3}{\sqrt{36b^2 - b^4}} = \frac{b\left(18 - b^2\right)}{b \cdot \sqrt{36 - b^2}} = \frac{18 - b^2}{\sqrt{36 - b^2}} = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 18 - b^2 = 0 \;;;\; b = \sqrt{18} = \underline{3\sqrt{2}\; unidades = b}$$

Sustituyendo en (*):

$$c = \sqrt{36 - b^2} = \sqrt{36 - 18} = \sqrt{18} = \underline{3\sqrt{2}\;\; unidades = c}$$

$$\underline{\underline{\textit{Se trata de un triángulo rectángulo e isósceles de catetos } 3\sqrt{2} \textit{ unidades}}}$$

Justificación de que se trata de un máximo:

$$S'' = \frac{-2b \cdot \sqrt{36 - b^2} - \left(18 - b^2\right) \cdot \frac{-2b}{2 \cdot \sqrt{36 - b^2}}}{\left(\sqrt{36 - b^2}\right)^2} = \frac{-2b \cdot \sqrt{36 - b^2} + \frac{18 - b^2}{\sqrt{36 - b^2}}}{36 - b^2} = \frac{-2b \cdot \left(36 - b^2\right) + 18 - b^2}{\left(36 - b^2\right) \cdot \sqrt{36 - b^2}} =$$

$$= \frac{-72b + 2b^3 + 18 - b^2}{\left(36 - b^2\right) \cdot \sqrt{36 - b^2}} = \underline{\frac{2b^3 - b^2 - 72b + 18}{\left(36 - b^2\right) \cdot \sqrt{36 - b^2}} = S''}$$

$$S''_{\left(\sqrt{18}\right)} = \frac{2 \cdot 18 \cdot \sqrt{18} - 18 - 72 \cdot \sqrt{18} + 18}{\left(36 - 18\right) \cdot \sqrt{36 - 18}} = \frac{-36 \cdot \sqrt{18}}{18 \cdot \sqrt{18}} = -2 < 0 \;\Rightarrow\; \underline{\textit{Máximo, c.q.j.}}$$

****

4º) Calcular la integral siguiente: $I=\int_0^1 \frac{x^2}{x^2-x-2}\cdot dx$.

En primer lugar resolvemos la integral indefinida A, para la cual comenzamos haciendo la división del numerador entre el denominador:

$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & & & x^2-x-2 \\ \cline{4-4} -x^2 & +x & +2 & 1 \\ \cline{1-3} 0 & x & +2 & \end{array}$$

$$A=\int \frac{x^2}{x^2-x-2}\cdot dx=\int\left(1+\frac{x+2}{x^2-x-2}\right)\cdot dx=\int dx+\int \frac{x+2}{x^2-x-2}\cdot dx=\underline{x+I_1\ =A} \qquad (*)$$

$$I_1=\int \frac{x+2}{x^2-x-2}\cdot dx \Rightarrow x^2-x-2=0\ ;;\ x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \underline{x^2-x-2=(x-2)(x+1)}$$

$$I_1=\int \frac{x+2}{x^2-x-2}\cdot dx \Rightarrow \frac{x+2}{x^2-x-2}=\frac{x+2}{(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}=\frac{Ax+A+Bx-2B}{(x-2)(x+1)}=$$

$$=\frac{(A+B)x+(A-2B)}{x^2-x-2} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} A+B=1 \\ A-2B=2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2A+2B=2 \\ A-2B=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 3A=4\ ;;\ \underline{A=\frac{4}{3}}\ ;;\ \underline{B=-\frac{1}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ I_1=\int\left(\frac{\frac{4}{3}}{x-2}+\frac{-\frac{1}{3}}{x+1}\right)\cdot dx=\underline{\frac{4}{3}L|x-2|-\frac{1}{3}L|x+1|=I_1}$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido:

$$A=x+\left(\frac{4}{3}L|x-2|-\frac{1}{3}L|x+1|\right)=\underline{x+\frac{4}{3}L|x-2|-\frac{1}{3}L|x+1|=A}.$$

$$I=\int_0^1 \frac{x^2}{x^2-x-2}\cdot dx=\left[x+\frac{4}{3}L|x-2|-\frac{1}{3}L|x+1|\right]_0^1=\left[1+\frac{4}{3}L|1-2|-\frac{1}{3}L|1+1|\right]-\left[+\frac{4}{3}L|-2|-\frac{1}{3}L|1|\right]=$$

$$=1+\frac{4}{3}L1-\frac{1}{3}L2-\frac{4}{3}L2+\frac{1}{3}L1=1-\frac{1}{3}L2-\frac{4}{3}L2=\underline{\underline{1-\frac{5}{3}L2=I}}$$

****