PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

JUNIO – 2011 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Observaciones importantes: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A

1º) Demuestra, sin utilizar la regla de Sarrus y sin desarrollar directamente por una fila y/o columna, que $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+2 & x+4 \\ x & x+3 & x+6 \end{vmatrix} = 0$. Indique en cada caso qué propiedad (o propiedades) de los determinantes se está utilizando.

Se van a utilizar las siguientes propiedades:

.- Si un determinante tiene dos filas iguales o proporcionales, su valor es cero.

.- Si todos los elementos de una fila o columna se descomponen en dos o más sumandos, entonces el determinante es igual a la suma de los determinantes que tienen en esa fila o columna el primero y segundo sumandos, respectivamente, y en las demás los mismos elementos que el determinante inicial.

.- Si los elementos de una línea (fila o columna) se multiplican o dividen por un número, el valor del determinante queda multiplicado o dividido por dicho número.

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+2 & x+4 \\ x & x+3 & x+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x & x+2 \\ x & x & x+4 \\ x & x & x+6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & x+2 \\ x & 2 & x+4 \\ x & 3 & x+6 \end{vmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} x & 1 & x+2 \\ x & 2 & x+4 \\ x & 3 & x+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & x+2 \\ x & 2 & x+4 \\ x & 3 & x+6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & 1 & x \\ x & 2 & x \\ x & 3 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & 2 & 4 \\ x & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & 2 & 4 \\ x & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & 2 & 4 \\ x & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x & 2 & 2 \\ x & 3 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$$

****

2º) Determine el plano π que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} 3x+2y-5z=-2 \\ 4x-3y-2z=-1 \end{cases}$ y es paralelo a la recta $s \equiv \frac{x-5}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-17}{-1}$.

El plano pedido tiene como vectores directores a los vectores directores de las rectas y, por contener a la recta r, contiene a todos sus puntos.

Para hallar un punto y un vector director de r la expresamos por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} 3x+2y-5z=-2 \\ 4x-3y-2z=-1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+2y=-2+5\lambda \\ 4x-3y=-1+2\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 9x+6y=-6+15\lambda \\ 8x-6y=-2+4\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 17x=-8+19\lambda \;;;$$

$$\underline{x=-\frac{8}{17}+\frac{19}{17}\lambda}. \qquad \left.\begin{array}{l} 12x+8y=-8+20\lambda \\ -12x+9y=3-6\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 17y=-5+14\lambda \;;;\; \underline{y=-\frac{5}{17}+\frac{14}{17}\lambda}.$$

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es: $\underline{r \equiv \begin{cases} x=-\frac{8}{17}+\frac{19}{17}\lambda \\ y=-\frac{5}{17}+\frac{14}{17}\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}$.

Un vector director de r es $\underline{\overrightarrow{v_r}=(19,\ 14,\ 17)}$ y un punto es $\underline{P\left(-\frac{8}{17},\ -\frac{5}{17},\ 0\right)}$.

Un vector director de s es $\underline{\overrightarrow{v_s}=(3,\ -2,\ -1)}$.

La expresión general del plano π es la siguiente:

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}\right) \equiv \begin{vmatrix} x+\frac{8}{17} & y+\frac{5}{17} & z \\ 19 & 14 & 17 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \;;; \begin{vmatrix} \frac{17x+8}{17} & \frac{17y+5}{17} & z \\ 19 & 14 & 17 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \;;;$$

$$\begin{vmatrix} 17x+8 & 17y+5 & 17z \\ 19 & 14 & 17 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \;;; -14(17x+8)+51(17y+5)-38\cdot 17z-714z+34(17x+8)+19(17y+5)=0$$

$$20(17x+8)+70(17y+5)-1360z=0 \;;;\; 10(17x+8)+35(17y+5)-680z=0 \;;;$$

$$170x+80+595y+175-680z=0 \;;;\; 170x+595y-680z+255=0 \;;;\; 10x+35y-40z+15=0 \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 2x+7y-8z+3=0}}$$

****

3º) Dada la función $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$, se pide:

a) Estudiar si existen asíntotas verticales y calcular los límites laterales en caso de que las haya.

b) Estudiar si existen asíntotas horizontales y calcularlas en caso de que las haya.

----

a)

Las asíntotas verticales son de la forma y = k siendo k el conjunto de valores reales de x que anulan el denominador.

$e^x-1=0\ ;;\ e^x=1 \Rightarrow \underline{x=0}$.

<u>La recta x = 0 (eje de ordenadas) es asíntota vertical.</u>

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{1+1}{0^-}=\underline{\underline{-\infty}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{1+1}{0^+}=\underline{\underline{+\infty}}.$$

b)

Son de la forma y = k siendo k el conjunto de valores reales que toma la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow In\det. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=\underline{\underline{1}}.$$

$$k=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{e^{-\infty}+1}{e^{-\infty}-1}=\frac{0+1}{0-1}=\underline{\underline{-1}}.$$

<u>Las rectas y = 1 e y = -1 son asíntotas horizontales de f(x).</u>

****

4º) a) Calcule la integral indefinida $I=\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\cdot dx$ utilizando el método de cambio de variable (o método de sustitución).

b) Calcule la integral $I=\int_0^1 L\left(1+x^2\right)\cdot dx$, donde L denota la función logaritmo neperiano, utilizando el método de integración por partes.

----

a)

$$I=\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1+\sqrt{x}=t \rightarrow x=(t-1)^2 \;\;;;\;\; \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot dx=dt \\ \frac{\sqrt{x}}{2x}\cdot dx=dt \rightarrow \sqrt{x}\cdot dx=2(t-1)^2\cdot dt \end{array}\right\} \Rightarrow I=\int \frac{2(t-1)^2}{t}\cdot dt=$$

$$=2\cdot\int \frac{t^2-2t+1}{t}\cdot dt=2\cdot\int\left(t-2+\frac{1}{t}\right)\cdot dt=2\cdot\left(\frac{t^2}{2}-2t+Lt\right)+C=t^2-4t+2Lt+C=$$

$$=\left(1+\sqrt{x}\right)^2-4\cdot\left(1+\sqrt{x}\right)+2L\left(1+\sqrt{x}\right)+C=1+2\sqrt{x}+x-4-4\sqrt{x}+2L\left(1+\sqrt{x}\right)+C=$$

$$=\left(x-2\sqrt{x}+1\right)+2L\left(1+\sqrt{x}\right)+C=\underline{\underline{\left(1+\sqrt{x}\right)+2L\left(1+\sqrt{x}\right)+C=I}}$$

b)

$$I=\int_0^1 L\left(1+x^2\right)\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} L\left(1+x^2\right)=u \rightarrow du=\frac{2x}{1+x^2}\cdot dx \\ dx=dv \rightarrow v=x \end{array}\right\} \Rightarrow I=\left[L\left(1+x^2\right)\cdot x-\int x\cdot\frac{2x}{1+x^2}\cdot dx\right]_0^1=$$

$$=\left[xL\left(1+x^2\right)-2\int\frac{x^2}{1+x^2}\cdot dx\right]_0^1=\left[xL\left(1+x^2\right)-2\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}\cdot dx\right]_0^1=\left[xL\left(1+x^2\right)-2\int 1-\frac{1}{1+x^2}\cdot dx\right]_0^1=$$

$$=\left[xL\left(1+x^2\right)-2\cdot(x-arc\ tag\ x)\right]_0^1=\left[1\cdot L\left(1+1^2\right)-2\cdot(1-arc\ tag\ 1)\right]-\left[0\cdot L\left(1+0^2\right)-2\cdot(0-arc\ tag\ 0)\right]=$$

$$=\left[L2-2\cdot\left(1-\frac{\pi}{2}\right)\right]-\left[0\cdot L1-2\cdot(0-0)\right]=L2-2+\pi=\underline{\underline{(\pi-2+L2)\,u^2=I}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Discuta, en función de los parámetros α y b, el siguiente sistema $\left.\begin{array}{r} x+ay+2z=3 \\ x-3y-z=-1 \\ -x+8y+4z=b \end{array}\right\}$.

No hay que resolverlo.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \ y \ A'=\begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & 4 & b \end{pmatrix}.$$

El rango de A en función del parámetro α es:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 8 & 4 \end{vmatrix}=-12+16+a-6+8-4a=6-3a=0 \Rightarrow \underline{a=2}.$$

$$\underline{\underline{Para \ \ a\neq 2 \Rightarrow Rang \ \ A=Rang \ \ A'=3=n^o \ \ incóg. \Rightarrow Compatible \ \ Determinado}}$$

Para α = 2 es $A'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & 4 & b \end{pmatrix}$. El rango de A' en función de b es:

$$\left.\begin{array}{l} \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 8 & b \end{vmatrix}=-3b+24+2-9+8-2b=25-5b=0 \rightarrow \underline{b=5} \\ \{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & b \end{vmatrix}=-b+12+2-3+4-2b=15-3b=0 \rightarrow \underline{b=5} \\ \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & -1 \\ 8 & 4 & b \end{vmatrix}=-2b-36-16+24+8+6b=-20+4b=0 \rightarrow \underline{b=5} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{b=5}$$

$$\underline{\underline{Para \ \left\{\begin{array}{l} a=2 \\ b=5 \end{array}\right\} \Rightarrow Rang \ \ A=Rang \ \ A'=2<n^o \ \ incóg. \Rightarrow Compatible \ \ Indeterminado}}$$

$$\underline{\underline{Para \ \left\{\begin{array}{l} a=2 \\ b\neq 5 \end{array}\right\} \Rightarrow Rang \ \ A=2 \ ;; \ Rang \ \ A'=3 \Rightarrow Incompatible}}$$

****

2º) Se llama mediana de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por el vértice de un triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice.

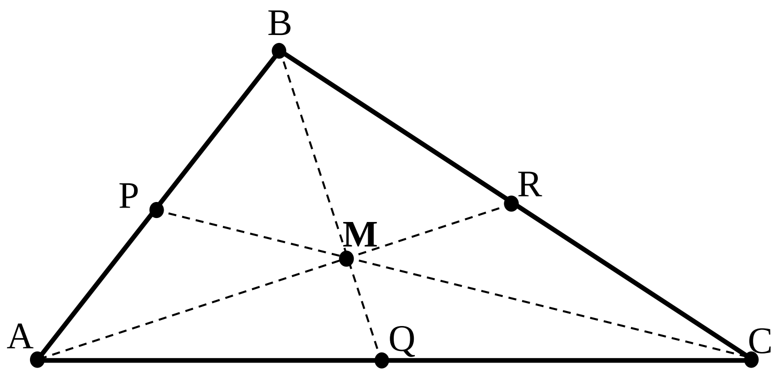
a) Calcule las tres medianas del triángulo de vértices A(5, -1, 4), B(-1, 7, 6) y $C(5,\ 3,\ 2)$.

b) Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto (llamado baricentro) y calcule las coordenadas de dicho punto.

----

a)

Para facilitar la comprensión del ejercicio se hace el gráfico adjunto.



Los puntos medios de los lados del triángulo son los siguientes:

$M_{\overline{AB}} \equiv P(2,\ 3,\ 5)$, $M_{\overline{AC}} \equiv Q(5,\ 1,\ 3)$ y $M_{\overline{BC}} \equiv R(2,\ 5,\ 4)$.

Las ecuaciones paramétricas de las tres medianas son las siguientes:

$\overrightarrow{u'} = \overrightarrow{AR} = (2,\ 5,\ 4) - (5,\ -1,\ 4) = (-3,\ 6,\ 0)$.

$\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{BQ} = (5,\ 1,\ 3) - (-1,\ 7,\ 6) = (6,\ -6,\ -3)$.

$\overrightarrow{w'} = \overrightarrow{CP} = (2,\ 3,\ 5) - (5,\ 3,\ 2) = (-3,\ 0,\ 3)$.

Mediana por A $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Vector\ \ director:\ \overrightarrow{u} = (1,\ -2,\ 0) \\ Punto:\ A(5,\ -1,\ 4) \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{m_A \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 5 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = 4 \end{array} \right.}}}$.

Mediana por B $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Vector\ \ director:\ \overrightarrow{v} = (2,\ -2,\ -1) \\ Punto:\ B(-1,\ 7,\ 6) \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{m_B \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + 2\mu \\ y = 7 - 2\mu \\ z = 6 - \mu \end{array} \right.}}}$.

Mediana por C $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Vector\ \ director:\ \overrightarrow{w} = (1,\ 0,\ -1) \\ Punto:\ C(5,\ 3,\ 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{m_C \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 5 + \gamma \\ y = 3 \\ z = 2 - \gamma \end{array} \right.}}}$.

b)

Si admitimos la hipótesis planteada no es necesario demostrar que las rectas se cortan en un punto, por lo cual, tienen que ser iguales las respectivas coordenadas de las rectas tomadas dos a dos y además, el punto de corte tiene que ser el mismo, veamos:

$$\left. \begin{array}{l} m_A \equiv \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = 4 \end{cases} \\ \\ m_B \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\mu \\ y = 7 - 2\mu \\ z = 6 - \mu \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5 + \lambda = -1 + 2\mu \\ -1 - 2\lambda = 7 - 2\mu \\ 4 = 6 - \mu \end{array} \right\} \rightarrow \underline{\mu = 2} \quad \Rightarrow 5 + \lambda = -1 + 4 \;;;\; \underline{\lambda = -2} \Rightarrow \underline{\underline{M(3,\ 3,\ 4)}}.$$

$$\left. \begin{array}{l} m_A \equiv \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = 4 \end{cases} \\ \\ m_C \equiv \begin{cases} x = 5 + \gamma \\ y = 3 \\ z = 2 - \gamma \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5 + \lambda = 5 + \gamma \\ -1 - 2\lambda = 3 \\ 4 = 2 - \gamma \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow \underline{\lambda = -2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{M(3,\ 3,\ 4)}}. \\ \rightarrow \underline{\gamma = -2} \end{array}$$

Como puede verse, el punto de corte de las rectas es el mismo, como teníamos que comprobar.

<u>El baricentro es M(3, 3, 4)</u>

****

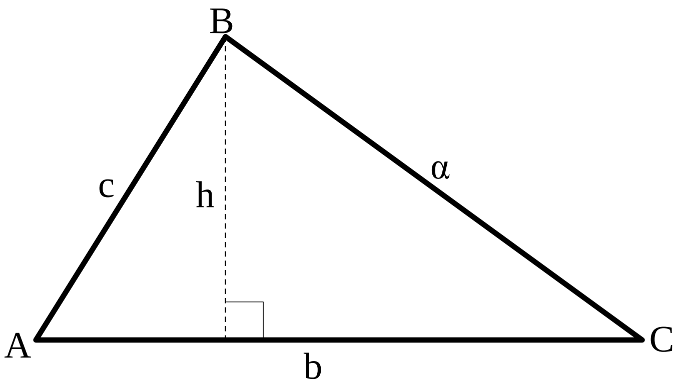
3º) Las manecillas de un reloj miden 4 y 6 cm; uniendo sus extremos se forma un triángulo.

a) Demuestre que el área de dicho triángulo viene dada por la función $A(x)=12\,sen\,x$, donde x denota el ángulo formado por las manecillas del reloj.

b) Determine el ángulo que deben formar las manecillas del reloj para que el área de dicho triángulo sea máxima. ¿Cuál es el valor de dicha área máxima? Se puede utilizar el apartado a) aunque no se haya demostrado.

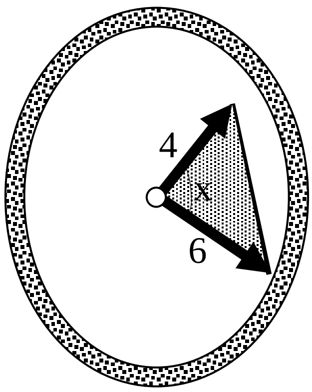
----

a)



Sabiendo que el área de un triángulo es el producto de la base por la altura y dividido por dos: $S=\frac{b\cdot h}{2}$.

Por otra parte, de la figura se deduce que: $sen\ A=\frac{h}{c}\ \Rightarrow\ h=c\cdot sen\ A$. Sustituyendo el valor de h en la fórmula del área, resulta: $S=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{b\cdot c\cdot sen\ A}{2}$.



De la última fórmula se deduce que "el área de un triángulo es igual a la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo que forman".

Teniendo en cuenta lo anterior y observando la figura del reloj, es fácil deducir lo pedido:

$$A(x)=\frac{4\cdot 6\cdot sen\ x}{2}=\underline{\underline{12\,sen\,x=A(x)}}\ \text{ c. q. d.}$$

(como queríamos demostrar)

b)

Para que el área sea máxima es necesario que se anule su primera derivada y sea negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$A'(x)=12\cdot\cos\ x=0\ \Rightarrow\ \cos\ x=0\ \Rightarrow\ \underline{x_1=90^\circ=\frac{\pi}{2}}\ ;;\ \underline{x_2=270^\circ=\frac{3\pi}{2}}\ .$$

$$A''(x)=-12\,sen\ x=0\Rightarrow\begin{cases} x_1=90^\circ\rightarrow A''(90^\circ)=-12\,sen\ 90^\circ=-12\cdot 1=-12<0\Rightarrow \underline{\textit{Máximo}} \\ \\ x_1=270^\circ\rightarrow A''(270^\circ)=-12\,sen\ 270^\circ=-12\cdot(-1)=12>0\Rightarrow \underline{\textit{Mínimo}} \end{cases}$$

<u>Para que el área del triángulo sea máxima las agujas deben formar un ángulo de 90º</u>

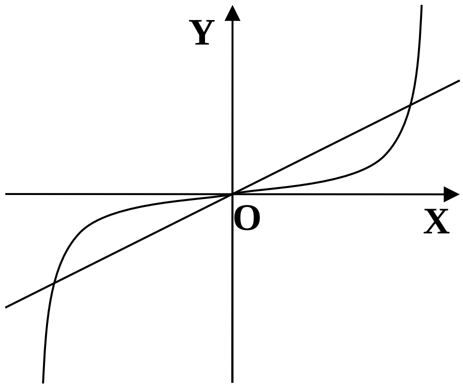
El valor del área máxima es la siguiente:

$$A(90^{o}) = 12 \cdot sen\ 90^{o} = 12 \cdot 1 = \underline{\underline{12\ u^2 = A}}$$

****

4º) a) Dada la función $f(x)=\frac{3x}{1-x^2}$ definida para los valores -1 < x < 1, determine los puntos de corte de la recta $y=4x$ con la gráfica de f.

b) Calcule el área del recinto limitado por la recta $y=4x$ y la gráfica de f.



****

a)

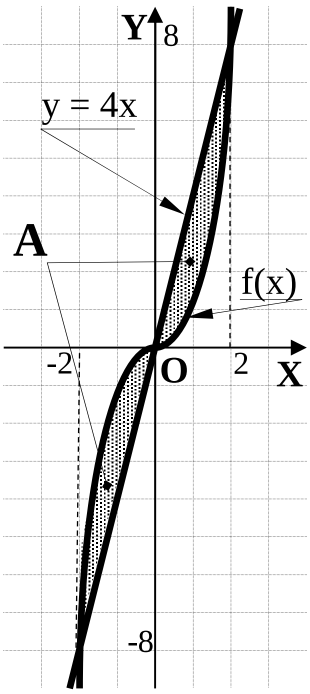
Los puntos de corte de la función $f(x)=\frac{3x}{1-x^2}$ con la recta $y=4x$ se obtienen de la igualación de ambas funciones.

$$y=f(x) \Rightarrow \frac{3x}{1-x^2}=4x \;;\; 3x=4x-4x^3 \;;\; 4x^3-x=0 \;;\; x\left(4x^2-1\right)=0 \Rightarrow \underline{x_1=0} \;;$$

$$4x^2-1=0 \;;\; 4x^2=1 \;;\; x^2=\frac{1}{4} \;;\; x=\pm\sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow \underline{x_1=-\frac{1}{2}} \;;\; \underline{x_2=\frac{1}{2}}.$$

$$\underline{\underline{\textit{Los puntos de corte son } A\left(-\frac{1}{2},\ -2\right),\ O(0,\ 0)\ y\ B\left(\frac{1}{2},\ 2\right)}}$$

b)



La función f(x) es simétrica con respecto al origen, por ser $f(-x)=\frac{3\cdot(-x)}{1-(-x)^2}=\frac{-3x}{1-x^2}=-f(x)$.

Teniendo en cuanta lo anterior y el valor de la integral indefinida $I=\int\frac{x}{1-x^2}\cdot dx$, que es:

$$I_1=\int\frac{x}{1-x^2}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}1-x^2=t\\ xdx=-\frac{1}{2}dt\end{array}\right\} \Rightarrow I=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{t}\cdot dt=$$

$$=-\frac{1}{2}Lt+C=\underline{-\frac{1}{2}L\left|1-x^2\right|+C=I}$$, el área pedida es:

$$A=2\cdot\int_0^2\left(4x-\frac{3x}{1-x^2}\right)dx=2\cdot\left(4\cdot\int_0^2 x\,dx-3\cdot\int_0^2\frac{x}{1-x^2}dx\right)=$$

$$=8\int_0^2 x\,dx-6\int_0^2\frac{x}{1-x^2}\cdot dx=8\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2-6\cdot\left[-\frac{1}{2}L\left|1-x^2\right|\right]_0^2=8\cdot(2-0)-6\cdot\left|-(L3-L1)\right|=$$

$$=16-6\cdot\left|-L3+L1\right|=16-6\cdot\left|-L3+0\right|=16-6L3=16-6'59=16-3'296=\underline{\underline{9'41\,u^2=A}}.$$

****