PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

SEPTIEMBRE – 2012

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Observaciones importantes: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A

1º) a) Determine para qué valores del parámetro α forma una base en R^3 el conjunto de vectores $S=\{(1,\ a,\ 1),\ (1-a,\ a-1,\ 0),\ (1,\ 1,\ a)\}$.

b) Estudie el rango del conjunto S en los casos en que no forme una base en R^3.

----

a)

Tres vectores forman base cuando son linealmente independientes, es decir: cuando el determinante que determinan es distinto de cero.

$$Rango\ \ S\ \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a(a-1)+(1-a)-(a-1)-a^2(1-a)=$$

$=a^2-a+1-a-a+1-a^2+a^3=a^3-3a+2=0$. Resolviendo por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -3 & 2 \\
1 & & 1 & 1 & -2 \\
\hline
 & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \\
1 & & 1 & 2 & \\
\hline
 & 1 & 2 & \boxed{0} & \\
-2 & & -2 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

Las raíces diferentes son $\underline{a_1=1}$ y $\underline{a_2=-2}$.

$$\underline{\underline{Para \ \left\{ \begin{matrix} a \neq 1 \\ a \neq -2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow Rango\ S = 3 \Rightarrow Los\ vectores\ forman\ base\ en\ R^3}}$$

b)

$$Para\ \ a = 1 \Rightarrow Rango\ \ S \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \underline{Rango\ \ S = 1}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a = 1 \Rightarrow Rango\ S = 1 \Rightarrow Los\ vectores\ son\ linealamente\ dependientes}}$$

(dos vectores iguales y uno nulo)

$$Para\ \ a = -2 \Rightarrow Rango\ \ S \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow \underline{Rango\ \ S = 2}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a = -2 \Rightarrow Rango\ S = 2 \Rightarrow Los\ vectores\ son\ linealamente\ dependientes}}$$

(los vectores son linealmente independiente dos a dos)

****

2º) Determine la ecuación implícita o general del plano que contiene al punto A(0, 1, 2) y es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$.

Un vector director de la recta r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son los siguientes: $\overrightarrow{n_1} = (2,\ 1,\ -1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1,\ -1,\ 1)$.

$$\overrightarrow{v'_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = i - j - 2k - k - i - 2j = -3j - 3k = (0,\ -3,\ -3) \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_r} = (0,\ 1,\ 1)}.$$

El haz de planos perpendiculares a r tiene como vector normal a $\overrightarrow{v_r} = (0,\ 1,\ 1)$; su expresión general es de la forma $\beta \equiv y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano π que queremos hallar es el que contiene al punto A(0, 1, 2), por lo cual tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \beta \equiv y + z + D = 0 \\ A(0,\ 1,\ 2) \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + 2 + D = 0 \ ;; \ \underline{D = -3} \ \Rightarrow \ \underline{\underline{\pi \equiv y + z - 3 = 0}}.$$

****

3º) Dada la función $f(x)=x\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1\right)$, se pide:

a) Dominio de definición.

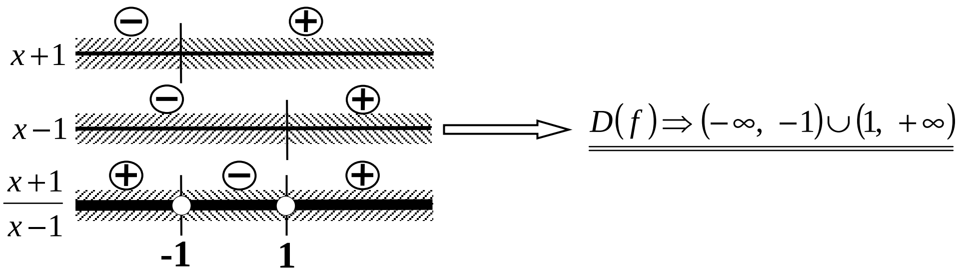
b) Calcule $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$. ¿Es posible calcular también $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$? Justifica la respuesta.

c) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

----

a)

El dominio de definición de f(x) es R, excepto los valores que no son reales de la expresión $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$, que son los que hacen $\frac{x+1}{x-1}<0$; se detallan en el gráfico siguiente.



b)

$$\lim_{x \to 1^+} f(x)=\lim_{x \to 1^+}\left[x\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1\right)\right]=1\cdot\left(\sqrt{\frac{1+1}{0^+}}-1\right)=\sqrt{\infty}-1=\underline{\underline{\infty}}.$$

No es posible calcular $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ por no estar definida la función.

c)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)=\lim_{x \to +\infty}\left[x\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1\right)\right]=\infty(1-1)=\infty\cdot 0 \Rightarrow In\det. \Rightarrow \lim_{x \to +\infty}\left[x\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1\right)\right]=$$

$$=\lim_{x \to +\infty}\left[x\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}-1\right)\right]=\lim_{x \to +\infty}\left(x\cdot\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}\right)=\lim_{x \to +\infty}\frac{x\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}=$$

$$=\lim_{x \to +\infty}\frac{x[x+1-(x-1)]}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}=\lim_{x \to +\infty}\frac{2x}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}=\lim_{x \to +\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}+x-1}=$$

$$=\lim_{x \to +\infty}\frac{\frac{2x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}=\lim_{x \to +\infty}\frac{2}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}+1-\frac{1}{x}}=\lim_{x \to +\infty}\frac{2}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1-\frac{1}{x}}=\frac{2}{\sqrt{1-\frac{1}{\infty}}+1-\frac{1}{\infty}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-0}+1-0}=\frac{2}{1+1}=\frac{2}{2}=\underline{\underline{1}}$$

****

4º) De todas las primitivas de la función $f(x)=\frac{e^{2x}}{1+e^{x}}$, encuentre la que pasa por el punto de coordenadas A(0, 1).

$$F(x)=\int\frac{e^{2x}}{1+e^{x}}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} e^{x}=t \\ e^{x}\,dx=dt \\ dx=\frac{dt}{t}\end{array}\right\} \Rightarrow F(t)=\int\frac{t^{2}}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\cdot dt=\int\frac{t}{1+t}\cdot dt=\int\frac{1+t-1}{1+t}\cdot dt=$$

$$=\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\cdot dt=t-L|1+t|+C \Rightarrow \underline{F(x)=e^{x}-L\left(1+e^{x}\right)+C}.$$

$$F(0)=1 \Rightarrow F(0)=e^{0}-L\left(1+e^{0}\right)+C=1\ ;;\ 1-L2+C=1 \Rightarrow \underline{C=L2}.$$

$$\underline{\underline{F(x)=e^{x}-L\left(1+e^{x}\right)+L2}}$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, calcule las potencias A^2, A^3 y A^4.

b) Calcule A^{2012}.

----

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+3-4 & 0-12+12 & 0-15+16 \\ 0-4+5 & 3+16-15 & 4+20-20 \\ -0+3-4 & -3-12+12 & -4-15+16 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} = A^2}}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0+0-1 & -3-0+3 & -4-0+4 \\ 0+4-4 & 3-16+12 & 4-20+16 \\ -0-3+3 & -3+12-9 & -4+15-12 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I = A^3}}.$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = -I \cdot A = \underline{\underline{-A = A^4}}.$$

b)

$$A^{2012} = A^{3 \cdot 670+2} = \left(A^3\right)^{670} \cdot A^2 = (-I)^{670} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = \underline{A^2}.$$

$$\underline{\underline{A^{2012} = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}}}$$

****

2º) Considere las rectas $r\equiv\frac{x}{7}=\frac{y}{a-4}=\frac{z+6}{5a-6}$ y $s\equiv\frac{x-5}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-6}{4}$.

a) Estudie la posición relativa de r y s.

b) Calcule el punto de corte de r y s en los casos en que se corten.

----

a)

Los vectores directores de las rectas son $\overrightarrow{v_r}=(7,\ a-4,\ 5a-6)$ y $\overrightarrow{v_s}=(3,\ -1,\ 4)$.

Para que las rectas r y s sean paralelas es necesario que sus vectores directores sean linealmente dependientes, o sea, que sus componente sea proporcionales.

$$\frac{7}{3}=\frac{a-4}{-1}=\frac{5a-6}{4}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}-7=3a-12\\ 28=15a-18\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}5=3a\\ 46=15a\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}25=15a\\ 46=15a\end{array}\right\}\Rightarrow\ \underline{a\notin R}.$$

<u>Las rectas r y s no son paralelas para cualquier valor real de α.</u>

Lo anterior implica, necesariamente, que las rectas se cruzan o se cortan.

Para diferenciar el caso determinamos el vector $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{AB}$, siendo A(0, 0, -6) un punto de r y B(5, 1, 6) un punto de s.

$$\overrightarrow{w}=\overrightarrow{AB}=B-A=(5,\ 1,\ 6)-(0,\ 0,\ -6)=(5,\ 1,\ 12).$$

Según que los vectores $\left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right\}$ tengan rango 2 o 3 las rectas se cortan o se cruzan, es decir, están o no en un mismo plano, respectivamente.

$$Rango\ \left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right\}\Rightarrow\begin{vmatrix}7 & a-4 & 5a-6\\ 3 & -1 & 4\\ 5 & 1 & 12\end{vmatrix}=-84+3(5a-6)+20(a-4)+5(5a-6)-28-36(a-4)=$$

$$=-112+8(5a-6)-16(a-4)=-112+40a-48-16a+64=-96+24a=0\ ;;\ 24a=96\ ;;\ \underline{a=4}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a\neq 4\ \Rightarrow\ Rango\ \left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right\}=3\ \Rightarrow\ Las\ \ rectas\ \ r\ \ y\ \ s\ \ se\ \ cruzan}}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=4\ \Rightarrow\ Rango\ \left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right\}=2\ \Rightarrow\ Las\ \ rectas\ \ r\ \ y\ \ s\ \ se\ \ cor\tan}}$$

b)

Para α = 4 las rectas son s $r\equiv\frac{x}{7}=\frac{y}{0}=\frac{z+6}{14}$ y $s\equiv\frac{x-5}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-6}{4}$ y sus expresiones paramétricas son las siguientes: $r \equiv \begin{cases} x = 7\lambda \\ y = 0 \\ z = -6 + 14\lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 5 + 3\mu \\ y = 1 - \mu \\ z = 6 + 4\mu \end{cases}$.

Para hallar el punto P de corte de las rectas r y s basta con igualar los valores de las respectivas variables para obtener los valores de λ y de μ.

$$\left.\begin{cases} 7\lambda = 5 + 3\mu \\ 0 = 1 - \mu \\ -6 + 14\lambda = 6 + 4\mu \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{\mu = 1} \;;;\; \underline{\lambda = \frac{8}{7}} \Rightarrow \underline{\underline{P(8,\ 0,\ 10)}}.$$

****

3º) Considere la función $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+a & si \;\; x\leq 0 \\ -x^2+bx+b+1 & si \;\; x>0 \end{cases}$. Determine los valores de los parámetros α y b para los cuales f(x) es continua y derivable en todo R.

Para que la función f(x) sea derivable en todos los números reales, es condición necesaria, que sea continua en R.

La función f(x) es continua para todo R, excepto para el valor x = 0, que es dudosa su continuidad. Para que la función sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e iguales al valor de la función en ese punto:

$$Para \;\; x=0 \Rightarrow \left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2-3x+a\right)=f(0)=\underline{a} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(-x^2+bx+b+1\right)=\underline{b+1} \end{cases}\right\} \Rightarrow a=b+1=0 \;;;\; \underline{a-b=1}. \;\; (*)$$

La función f(x) es derivable para todo R, excepto para el valor x = 0, que es dudosa su derivabilidad. Para que la función sea derivable para x = 0 tiene que ser derivable por la izquierda y por la derecha y ser ambas derivadas iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-3 & si \;\; x\leq 0 \\ -2x+b & si \;\; x>1 \end{cases} \Rightarrow \;\; f'(0)=\begin{cases} -3 & si \;\; x\leq 0 \\ b & si \;\; x>0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \underline{b=-3}.$$

Sustituyendo en (*): $a-(-3)=1 \;;;\; a+3=1 \;;;\; \underline{a=-2}$.

La función f(x) es continua y derivable en R para α = -2 y b = -3.

****

4º) Calcule el área comprendida entre la curva $y=\frac{3}{6+2x^2}$, el eje de abscisas y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de dicha curva.

Los puntos de inflexión de una curva son los valores que anulan su segunda derivada:

$$y'=\frac{-3\cdot 4x}{\left(6+2x^2\right)^2}=\frac{-12x}{\left(6+2x^2\right)^2}.$$

$$y''=\frac{-12\cdot\left(6+2x^2\right)^2+12x\cdot 2\cdot\left(6+2x^2\right)\cdot 4x}{\left(6+2x^2\right)^4}=\frac{-12\cdot\left(6+2x^2\right)+96x^2}{\left(6+2x^2\right)^3}=\frac{-72-24x^2+96x^2}{\left(6+2x^2\right)^3}=$$

$$=\frac{72x^2-72}{\left(6+2x^2\right)^3}=\underline{72\cdot\frac{x^2-1}{\left(6+2x^2\right)^3}=y''}.$$

$$y''=0\ \Rightarrow\ 72\cdot\frac{x^2-1}{\left(6+2x^2\right)^3}=0\ ;;\ x^2-1=0\ \Rightarrow\ \underline{x_1=-1}\ ;;\ \underline{x_2=1}.$$

La condición anterior de punto de inflexión es necesaria pero no suficiente; para que exista punto de inflexión es necesario que no se anule la tercera derivada para los valores que anulan la segunda. En este caso, por ser f(x) continua y derivable en R, es suficiente la primera condición, por lo cual, podemos asegurar que la función f(x) tiene puntos de inflexión para x = -1 y para x = 1.

Teniendo en cuenta que todas las ordenadas de la curva $y=\frac{3}{6+2x^2}$ son positivas, el área a calcular es la siguiente:

$$S=\int_{-1}^{1}\frac{3}{6+2x^2}\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{1}\frac{3}{3+x^2}\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{array}{c|c}\frac{x}{\sqrt{3}}=t & x=1\rightarrow t=\frac{\sqrt{3}}{3}\\ dx=\sqrt{3}\,dt & x=-1\rightarrow t=\frac{-\sqrt{3}}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{1}{1+t^2}\cdot dt=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left[arc\ tag\ t\right]_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(arc\ tag\ \frac{\sqrt{3}}{3}-arc\ tag\ \frac{-\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{6}-\frac{-\pi}{6}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{3}=\underline{\underline{\frac{\pi\sqrt{3}}{6}u^2=S}}.$$

****