PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

JUNIO – 2013

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Observaciones importantes: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A

1º) Discuta, en función del parámetro α, el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x-ay+z=1 \\ ax+y+z=4 \end{array}\right\}$. No hay que resolverlo en ningún caso.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro α es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}=-a+1+a+a^2-1-1=a^2-1=0 \Rightarrow \underline{a_1=-1} \;;;\; \underline{a_2=1}.$$

$$\underline{\underline{Para \left\{\begin{array}{c} a\neq -1 \\ a\neq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow Rango\ A = Rango\ A' = 3 = n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ \det er\min ado}}$$

$$Para\ a=-1 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_2\} \Rightarrow \underline{Rango\ M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para\ a=2 \Rightarrow Rango\ A = Rango\ A' = 2 < n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ in\det er\min ado}}$$

$$Para\ \ a=1\ es\ \ A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4+1+1+1-1-4=$$

$=-9+3=-6\neq 0$.

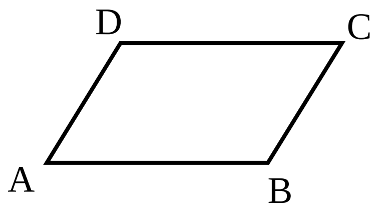
$$\underline{\underline{Para\ \ a=1 \Rightarrow Rango\ A=2\ ;;\ Rango\ A'=3 \Rightarrow Incompatible}}$$

****

2º) Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(1,\ 3,\ -4)$, $B(2,\ 6,\ 7)$ y $C(5,\ -1,\ 2)$.

a) Calcule el área del paralelogramo.

b) Determine el cuarto vértice D.



----

a)

Los puntos A, B y C determinan los vectores $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{BA}=A-B=(1,\ 3,\ -4)-(2,\ 6,\ 7)=(-1,\ -3,\ -11).$$

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{BC}=C-B=(5,\ -1,\ 2)-(2,\ 6,\ 7)=(3,\ -7,\ -5).$$

El área del paralelogramo que determinan dos vectores linealmente independientes es igual que el módulo de su producto vectorial:

$$S_{ABCD}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=\begin{Vmatrix} i & j & k \\ -1 & -3 & -11 \\ 3 & -7 & -5 \end{Vmatrix}=15i-33j+7k+9k-77i-5j=-62i-38j+16k=$$

$$=\sqrt{(-62)^2+(-38)^2+16^2}=\sqrt{3844+1444+256}=\sqrt{5544}=\sqrt{4\cdot 9\cdot 154}=6\sqrt{154}\cong \underline{\underline{74'46\ u^2=S_{ABCD}}}.$$

b)

Los vectores $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{BC}=(3,\ -7,\ -5)$ son iguales.

$$\overrightarrow{w}=\overrightarrow{AD}=D-A=(x,\ y,\ z)-(1,\ 3,\ -4)=(x-1,\ y-3,\ z+4).$$

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\ \Rightarrow\ (x-1,\ y-3,\ z+4)=(3,\ -7,\ -5)\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l} x-1=3\rightarrow x=4 \\ y-3=-7\rightarrow y=-4 \\ z+4=-5\rightarrow z=-9 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{D(4,\ -4,\ -9)}}.$$

****

3º) Dada por $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$, se pide:

a) Dominio de definición y puntos de corte con los ejes.

b) Estudio de las asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas).

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos (máximos y mínimos).

d) Representación gráfica aproximada.

----

a)

El dominio de definición de la función es: $\underline{\underline{D(f) \Rightarrow R-\{1\}}}$.

Corte con el eje X: $f(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2}{x-1}=0$;; $x^2=0$;; $x=0 \Rightarrow$ La función pasa por el origen de coordenadas.

b)

Las asíntotas de f son las siguientes:

Horizontales: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

Del primer apartado sabemos que $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, de donde se deduce que la función no tiene asíntotas horizontales.

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador: $x-1=0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x=1}}$

Oblicuas: Para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador; como en nuestro caso ocurre eso, tiene asíntotas oblicuas.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-x}=\underline{1=m}.$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=\underline{1=n}.$$

$$Asíntota\ \ oblícua \Rightarrow \underline{\underline{y=x+1}}$$

c)

Una función es creciente en un punto cuando su derivada es positiva y es decreciente cuando su derivada es negativa.

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x-1)-x^2\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\underline{\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}}.$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}=0\ \ ;;\ x(x-2)=0\ \ ;;\ \underline{x_1=0}\ \ ;;\ \underline{x_2=2}.$$

Los valores que anulan la primera derivada con el dominio de la función determinan los siguientes intervalos: $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ 2)$ y $(2,\ \infty)$. Para determinar el crecimiento o decrecimiento en los diferentes intervalos probamos con uno de sus respectivos valores:

$$f'(-1)=\frac{-1\cdot(-1-2)}{(-1-1)^2}=\frac{3}{4}>0.\qquad f'\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-2\right)}{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2}=\frac{-\frac{3}{4}}{\frac{9}{4}}<0.$$

$$f'\left(\tfrac{3}{2}\right)=\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-2\right)}{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2}=\frac{-\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}<0.\qquad f'(3)=\frac{3\cdot(3-2)}{(3-1)^2}=\frac{3}{4}>0.$$

$$\underline{\underline{Crecimiento\ \Rightarrow\ f'(x)>0\ \Rightarrow\ x\in(-\infty,\ 0)\cup(2,\ +\infty)}}$$

$$\underline{\underline{Decrecimiento\ \Rightarrow\ f'(x)<0\ \Rightarrow\ x\in(0,\ 1)\cup(1,\ 2)}}$$

Para que exista un máximo o un mínimo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada; para diferenciar los máximos de los mínimos recurrimos a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera, se trata de un máximo y si es positiva, de un mínimo.

$$f''(x)=\frac{(2x-2)\cdot(x-1)^2-x(x-2)\cdot 2\cdot(x-1)\cdot 1}{(x-1)^4}=\frac{(2x-2)\cdot(x-1)-2x(x-2)}{(x-1)^3}=$$

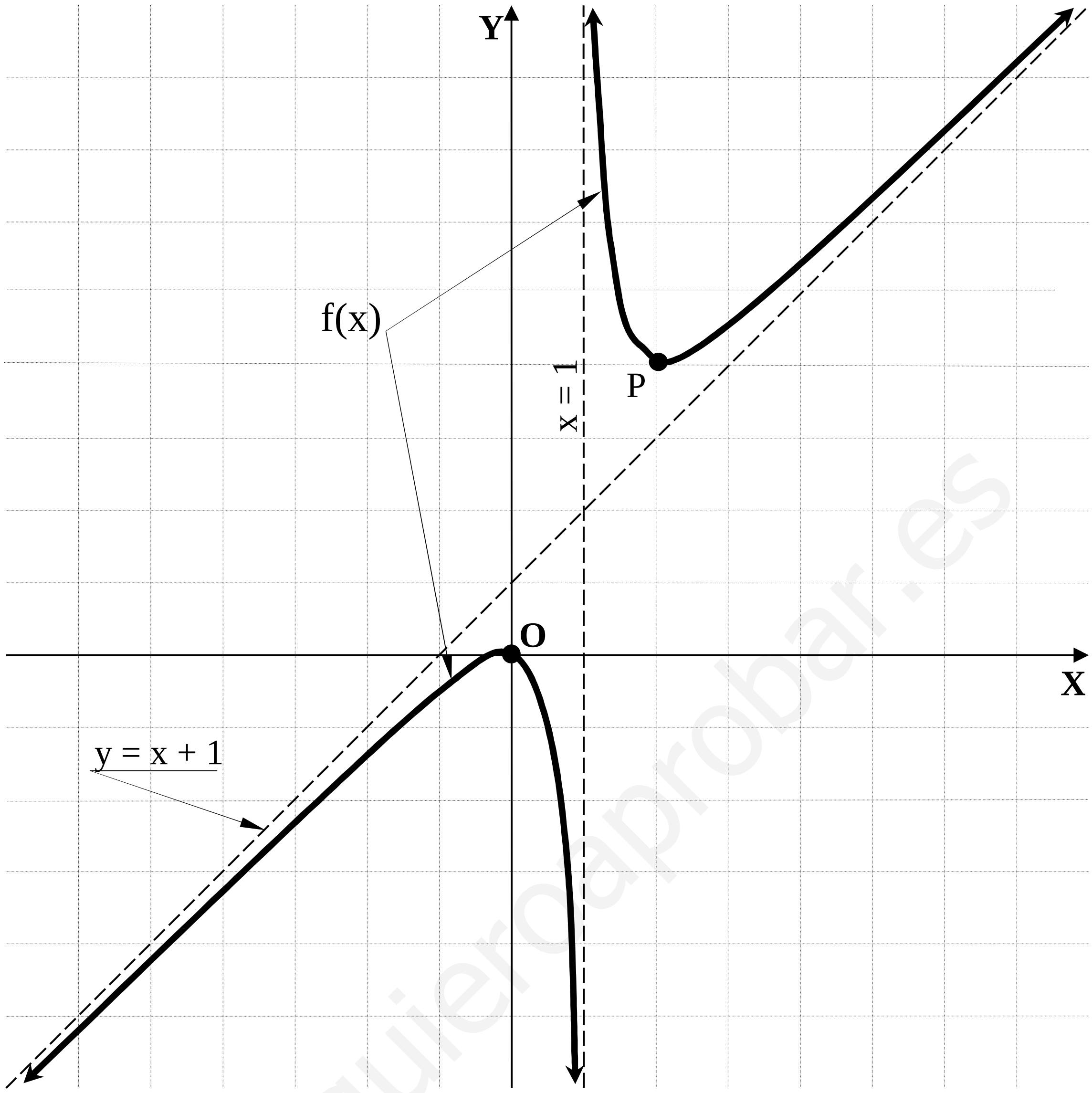
$$=\frac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x}{(x-1)^3}=\underline{\frac{2}{(x-1)^3}=f''(x)}.$$

$$f''(0)=\frac{2}{(0-1)^3}=\frac{2}{-1}=-2<0\ \Rightarrow\ Máx.\ \ ;;\ \ f(0)=0\ \ \Rightarrow\ \ \underline{\underline{Máx.\rightarrow O(0,\ 0)}}.$$

$$f''(2)=\frac{2}{(2-1)^3}=\frac{2}{1}=2>0\ \Rightarrow\ Mín.\ \ ;;\ \ f(2)=\frac{2^2}{2-1}=4\ \ \Rightarrow\ \ \underline{\underline{Mín.\rightarrow P(2,\ 4)}}.$$

c)

Con los datos anteriores, la representación gráfica de la función es, aproximadamente, la siguiente:



Y
X
O
P
f(x)
x = 1
y = x + 1

****

4º) Calcule la siguiente integral indefinida: $I=\int \frac{10}{x^2-x-6}\cdot dx$.

$$x^2-x-6=0\ ;;\ x=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{1\pm 5}{2}\ \Rightarrow\ \underline{x_1=-2}\ ;;\ \underline{x_2=3}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x^2+x-2=\underline{(x+2)(x-3)}.$$

$$\frac{10}{x^2-x-6}=\frac{10}{(x+2)(x-3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}=\frac{Ax-3A+Bx+2B}{x^2-x-6}=\frac{(A+B)x+(-3A+2B)}{x^2-x-6}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{array}{r}A+B=0\\-3A+2B=10\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}3A+3B=0\\-3A+2B=10\end{array}\right\}\rightarrow 5B=10\ ;;\ \underline{B=2}\ ;;\ \underline{A=-2}.$$

$$I=\int\frac{10}{x^2-x-6}\cdot dx=\int\left(\frac{-2}{x+2}+\frac{2}{x-3}\right)\cdot dx=-2\int\frac{1}{x+2}\cdot dx+2\int\frac{1}{x-3}\cdot dx=$$

$$=-2L|x+2|+2L|x-3|+C=\underline{\underline{L\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2+C}}.$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Compruebe que la matriz $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, es regular (o inversible) y calcule su matriz inversa.

b) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X + A^2 = B$, siendo A la matriz anterior y B la matriz $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. ¡OJO!: El producto de matrices NO es conmutativo.

----

a)

Una matriz es regular o inversible cuando su determinante es distinto de cero.

$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -4+3=-1 \neq 0 \Rightarrow$ A es inversible, como debíamos comprobar.

$$A^t = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \;;;\; Adj.\ A^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{Adj.\ A^t}{|A|} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}}}.$$

b)

$$A \cdot X + A^2 = B \;;;\; A \cdot X = B - A^2 = M \;;; A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot M \;;;\; I \cdot X = A^{-1} \cdot M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot M}.$$

$$M = B - A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16-3 & 4-1 \\ -12+3 & -3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 & 3 \\ -9 & -2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -12 & -1 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} = M}.$$

$$X = A^{-1} \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -12 & -1 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12+12 & -1+6 \\ 36-48 & 3-24 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -12 & -21 \end{pmatrix}}}.$$

****

2º) a) Determine la ecuación del plano π que contiene a los puntos $A(3,\ 2,\ 0)$, $B(5,\ 1,\ 1)$ y $C(2,\ 0,\ -1)$.

b) Determine la ecuación de la recta r que pasa por los puntos D(1, 2, 1) y E(2, -6, 0).

c) Estudie la posición relativa de r y π.

----

a)

Los puntos A, B y C determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (5,\ 1,\ 1) - (3,\ 2,\ 0) = (2,\ -1,\ 1)$.

$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (2,\ 0,\ -1) - (3,\ 2,\ 0) = (-1,\ -2,\ -1)$.

Los puntos A, B y C determinan el plano $\pi\left(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$;;

$(x-3) - (y-2) - 4z - z + 2(x-3) + 2(y-2) = 0$;; $3(x-3) + (y-2) - 5z = 0$;; $3x - 9 + y - 2 - 5z = 0$.

$$\underline{\underline{\pi \equiv 3x + y - 5z - 11 = 0}}$$

b)

Los puntos D(1, 2, 1) y E(2, -6, 0) determinan el vector director de la recta r, que es $\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{DE} = E - D = (2,\ -6,\ 0) - (1,\ 2,\ 1) = (1,\ -8,\ -1)$.

La recta r expresada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas es:

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 8\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}}}$$

c)

El vector normal del plano π es el siguiente: $\overrightarrow{n} = (8,\ -1,\ 17)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r} = (1,\ -8,\ -1)$ y $\overrightarrow{n} = (8,\ -1,\ 17)$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes. Tampoco son perpendiculares por ser diferente de cero su producto vectorial: $\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n} = (8,\ -1,\ -1) \cdot (8,\ -1,\ 17) = 64 + 1 - 17 = 48 \neq 0$, por lo cual:

<u>La recta r y el plano π son secantes.</u>

****

3º) Considere la función dada por $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{1-e^x} & si \;\; x\neq 0 \\ -1 & si \;\; x=0 \end{cases}$, se pide:

a) Demuestre que la función es continua en todo R.

b) Determine si la función es derivable en x = 0 y, en caso afirmativo, calcule f'(x).

----

a)

La función f(x) es continua para todo R, excepto para el valor x = 0, que es dudosa su continuidad. Para que la función sea continua en x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e iguales al valor de la función en ese punto:

$$Para \;\; x=0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{1-e^x}=\underline{-1} \quad (*) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(-1)=f(0)=\underline{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)} \Rightarrow$$ La función f(x) es continua en x = 0.

$$(*) \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{1-e^x}=\frac{0}{1-e^0}=\frac{0}{1-1}=\frac{0}{0}\Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\}\Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{-e^x}=\frac{1}{-e^0}=\frac{1}{-1}=\underline{-1}.$$

La función es continua en toda la recta real.

b)

La función f(x) es derivable para todo R, excepto para el valor x = 0, que es dudosa su derivabilidad. Para que la función sea derivable para x = 0 tiene que ser derivable por la izquierda y por la derecha y ser ambas derivadas iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{1+e^x(x-1)}{(1-e^x)^2} & si \;\; x\neq 0 \quad (*) \\ 0 & si \;\; x=0 \end{cases}.$$

$$(*) \quad g(x)=\frac{x}{1-e^x}\Rightarrow g'(x)=\frac{1\cdot(1-e^x)-x\cdot(-e^x)}{(1-e^x)^2}=\underline{\frac{1-e^x+x\cdot e^x}{(1-e^x)^2}}.$$

$$f'(0^-)=f'(0^+)=\frac{1-e^0+0\cdot e^0}{(1-e^0)^2}=\frac{1-1+0}{(1-1)^2}=\frac{0}{0}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{-e^x+e^x+x\cdot e^x}{-2(1-e^x)e^x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{-2(1-e^x)}=\frac{0}{-2(1-e^0)}=\frac{0}{0}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1}{2e^x}=\frac{1}{2\cdot e^0}=\underline{\underline{\frac{1}{2}=f'(0)}}.$$

****

4º) a) Encuentre una primitiva de la función $f(x) = arc\ tag\ x$.

b) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función f(x) y el eje de abscisas entre x = 0 y x = 1.

----

a)

$$F(x) = \int arc\ tag\ x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = arc\ tag\ x \to du = \dfrac{1}{1+x^2} \cdot dx \\ dv = dx \to v = x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (arc\ tag\ x) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = x \cdot arc\ tag\ x - \int \frac{x \cdot dx}{1+x^2} = \underline{x \cdot arc\ tag\ x - I_1} = I\ .$$

$$I_1 = \int \frac{x \cdot dx}{1+x^2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1+x^2 = t \\ 2x \cdot dx = dt \\ x \cdot dx = \dfrac{1}{2} \cdot dt \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} L\,t + C = \underline{\frac{1}{2} L(1+x^2) + C = I_1}\ .$$

Sustituyendo el valor obtenido en (*) resulta:

$$\underline{\underline{F(x) = x \cdot arc\ tag\ x - \frac{1}{2} L(1+x^2) + C}}$$

b) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función f(x) y el eje de abscisas entre x = 0 y x = 1.

En el intervalo (0, 1) todas las ordenadas de la función F(x) son positivas, por lo cual, el valor del área pedida es la siguiente:

$$S = \int_0^1 F(x) \cdot dx = \int_0^1 arc\ tag\ x\ \cdot dx = \left[x \cdot arc\ tag\ x - \frac{1}{2} L(1+x^2) \right]_0^1 =$$

$$= \left[1 \cdot arc\ tag\ 1 - \frac{1}{2} L(1+1^2) \right] - \left[0 \cdot arc\ tag\ 0 - \frac{1}{2} L(1+0^2) \right] = \left(arc\ tag\ 1 - \frac{1}{2} L\,2 \right) - 0 - \frac{1}{2} L1 = \underline{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} L\,2}\ .$$

$$\underline{\underline{S = \frac{1}{4}(\pi - L\,4)\ u^2}}$$

****