PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

SEPTIEMBRE – 2013

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Observaciones importantes: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A

1º) Clasifique y resuelva, si es posible, el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} 2x+3y+z=1 \\ 2x+2y+z=1 \\ 4x+5y+2z=2 \end{array}\right\}$.

La matriz ampliada es $M'=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 2, igual que el rango de la matriz de coeficientes, por ser la tercera fila la suma de las otras dos.

Teniendo en cuenta el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{\underline{Rango\ M = Rango\ M' = 2 < n^o\ incóg. \Rightarrow Sistema\ compatible\ indeterminado}}$$

Para resolver el sistema se desprecia una ecuación (tercera) y se parametriza una de las incógnitas (z):

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y+z=1 \\ 2x+2y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+3y=1-\lambda \\ 2x+2y=1-\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{y=0} \ ;;\ 2x=1-\lambda \ ;;\ \underline{x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda}.$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases},\ \forall \lambda \in R}}$$

****

2º) Tres de los cuatro vértices de un tetraedro son $A(3,\ 4,\ 0)$, $B(2,\ 1,\ 0)$ y $C(5,\ 1,\ 0)$. El cuarto vértice D está en la recta r que pasa por los puntos M(1, 2, 3) y N(-1, 4, 5).

a) Determine la ecuación de la recta r.

b) Calcule las coordenadas del vértice D para que el volumen del tetraedro sea de 6 unidades cúbicas.
Observación: Hay dos soluciones distintas; basta con calcular una de ellas.

----

a)

Los puntos M y N determinan el vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{NM} = M - N = (2,\ -2,\ -2)$.

El vector director de la recta r puede ser cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{v} = (2,\ -2,\ -2)$, por ejemplo: $\overrightarrow{v_r} = (1,\ -1,\ -1)$.

La expresión de r dada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas es, considerando el punto M, la siguiente:

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = 3-\lambda \end{cases}}}$$

b)

El punto D, por pertenecer a la recta r, es de la forma: $D(1+\lambda,\ 2-\lambda,\ 3-\lambda)$.

Los vectores que determinan el tetraedro son:

$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,\ 1,\ 0) - (3,\ 4,\ 0) = (-1,\ -3,\ 0)$.

$\overrightarrow{AC} = C - A = (5,\ 1,\ 0) - (3,\ 4,\ 0) = (2,\ -3,\ 0)$.

$\overrightarrow{AD} = D - A = (1+\lambda,\ 2-\lambda,\ 3-\lambda) - (3,\ 4,\ 0) = (-2+\lambda,\ -2-\lambda,\ 3-\lambda)$.

Sabiendo que el volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los vectores que lo determinan, en valor absoluto, será:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot \left| \left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\right] \right| = \frac{1}{6} \left\| \begin{matrix} -1 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ -2+\lambda & -2-\lambda & 3-\lambda \end{matrix} \right\| = \frac{3-\lambda}{6} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{3-\lambda}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{3-\lambda}{2} \cdot (1+2) = \underline{\frac{3}{2}(3-\lambda)}.$$

Nota: No se considera el valor absoluto por pedirnos una sola solución.

Como el volumen del tetraedro tiene que ser de 6 unidades cúbicas:

$$V_{ABCD} = \frac{3}{2}(3-\lambda) = 6 \;;;\; 3-\lambda = 4 \Rightarrow \underline{\lambda = -1}.$$

$$\left.\begin{array}{l} D(1+\lambda,\ 2-\lambda,\ 3-\lambda) \\ \lambda = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{D(0,\ 3,\ 4)}}$$

****

3º) Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2+2}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen\ x^2}{1-\cos x}$

----

a)

$$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2+2} = 1^{\infty} \Rightarrow In\det.\ del\ tipo\ "n^o\ e" \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2-1+2}{x^2-1} \right)^{x^2+2} =$$

$$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\frac{2}{x^2-1} \right)^{x^2+2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{x^2-1}{2}} \right)^{x^2+2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{x^2-1}{2}} \right)^{\frac{x^2-1}{2} \cdot \frac{2}{x^2-1} \cdot \left(x^2+2\right)} =$$

$$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{x^2-1}{2}} \right)^{\frac{x^2-1}{2} \cdot \frac{2x^2+4}{x^2-1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-1}{2}} \right)^{\frac{x^2-1}{2}} \right]^{\frac{2x^2+4}{x^2-1}} = \left[\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{x^2-1}{2}} \right)^{\frac{x^2-1}{2}} \right]^{\frac{2x^2+4}{x^2-1}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2+4}{x^2-1}} = \underline{\underline{e^2}}.$$

b)

$$\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen\ x^2}{1-\cos x} = \frac{sen\ 0}{1-\cos 0} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow In\det. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \frac{2x \cdot \cos x^2}{sen\ x} =$$

$$= \lim\limits_{x \to 0} \left(2 \cdot \cos x^2\right) \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{sen\ x} = 2 \cdot 1 \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{sen\ x} = 2 \cdot 1 = \underline{\underline{2}}.$$

****

4º) a) Encuentre una primitiva de la función $f(x)=\frac{6}{x^2+2x-8}$.

b) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función f(x) y el eje de abscisas entre x = -2 y x = 0.

----

a)

$$F(x)=\int f(x)\cdot dx=\int \frac{6}{x^2+2x-8}\cdot dx$$

$$x^2+2x-8=0\ ;;\ x=\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{-2\pm 6}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=2\\x_2=-4\end{cases}\ \Rightarrow\ \underline{x^2+2x-8=(x-2)(x+4)}.$$

$$\int\frac{6}{x^2+2x-8}\cdot dx=\int\frac{6}{(x-2)(x+4)}\cdot dx\ \Rightarrow\ \frac{6}{x^2+2x-8}=\frac{6}{(x-2)(x+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+4}=$$

$$=\frac{Ax+4A+Bx-2B}{(x-2)(x+4)}=\frac{(A+B)x+(4A-2B)}{x^2+2x-8}\Rightarrow\left.\begin{matrix}A+B=0\\4A-2B=6\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}A+B=0\\2A-B=3\end{matrix}\right\}\Rightarrow 3A=3\ ;;\ \underline{A=1}\ ;;\ \underline{B=-1}.$$

$$F(x)=\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+4}\right)\cdot dx=L|x-2|-L|x+4|+C=\underline{\underline{L\left|\frac{x-2}{x+4}\right|+C=F(x)}}.$$

b)

Considerando el apartado a) y que los valores de la función $f(x)=\frac{6}{x^2+2x-8}$ correspondientes al intervalo [-2, 0] son negativos, el área pedida es la siguiente:

$$S=\left[L\left|\frac{x-2}{x+4}\right|\right]_0^{-2}=L\left|\frac{-2-2}{-2+4}\right|-L\left|\frac{0-2}{0+4}\right|=L\left|\frac{-4}{2}\right|-L\left|\frac{-2}{4}\right|=L\ 2-L\ \frac{1}{2}=L\,2-(L\ 1-L\ 2)=$$

$$=L\,2-(0-L\ 2)=\underline{\underline{2\,L\ 2\ u^2\cong 1'39\ u^2=S}}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 6 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, calcule, sin desarrollar ni utilizar la regla de Sarrus, los siguientes determinantes, indicando en cada paso qué propiedad de los determinantes se está utilizando.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix}$. b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a+6 & 2b & 2c+3 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix}$.

----

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 2 = \underline{\underline{-6}}.$$

Se han utilizado, sucesivamente, las siguientes propiedades de los determinantes:

Si se intercambian dos líneas de un determinante, su valor cambia de signo.

Si se multiplican o dividen todos los elementos de una línea de un determinante por un número, su valor queda multiplicado o dividido por dicho número.

b)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a+6 & 2b & 2c+3 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 6 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 = \underline{\underline{6}}.$$

Se han utilizado, sucesivamente, las siguientes propiedades de los determinantes:

Si los elementos de una línea de un determinante se descomponen en dos sumandos, el valor del determinante es igual a la suma de los dos determinantes obtenidos al considerar por separado cada sumando de esa línea, y el resto de las líneas iguales a las del determinante inicial.

Si un determinante tiene dos líneas paralelas proporcionales, su valor es cero.

Si se multiplican o dividen todos los elementos de una línea de un determinante por un número, su valor queda multiplicado o dividido por dicho número.

****

2º) a) Determine la ecuación de la recta r que pasa por los puntos $A(2,\ 3,\ 0)$ y $B(-1,\ 8,\ 1)$.

b) Determine la ecuación del plano π que pasa por el punto C(1, 2, 3) y es perpendicular a la recta r.

----

a)

Los puntos A y B determinan el vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BA} = A - B = (3,\ -5,\ -1)$, que es director de la recta r pedida.

La expresión de r dada, por ejemplo, por unas ecuaciones continuas es, considerando el punto A, la siguiente:

$$\underline{\underline{r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{-5} = \frac{y}{-1}}}$$

b)

El haz de planos β perpendiculares a la recta r tiene la siguiente expresión general: $\beta \equiv 3x - 5y - z + D = 0$.

De los infinitos planos que componen el haz β, el plano pedido π es el que contiene al punto C(1, 2, 3):

$$\left.\begin{array}{l} \beta \equiv 3x - 5y - z + D = 0 \\ C(1,\ 2,\ 3) \end{array}\right\} \Rightarrow\ 3 \cdot 1 - 5 \cdot 2 - 3 + D = 0\ ;;\ 3 - 10 - 3 + D = 0\ ;;\ \underline{D = 10}.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 3x - 5y - z + 10 = 0}}$$

****

3º) Descomponga el número 48 como suma de dos números positivos de tal manera que el producto de uno de ellos por el cubo del otro sea el mayor posible.

Sean los números x e y: $x+y=48 \Rightarrow P=x\cdot y^3 \Rightarrow$ Máximo.

$$y=48-x \Rightarrow P=x\cdot(48-x)^3 \Rightarrow P'=1\cdot(48-x)^3+x\cdot\left[3(48-x)^2\cdot(-1)\right]=$$

$$=(48-x)^2\cdot[(48-x)-3x]=(48-x)\cdot(48-4x)=4\cdot(48-x)\cdot(12-x)=0 \Rightarrow \underline{x_1=48} \;;;\; \underline{x_2=12}.$$

La solución $x_1 = 48$ carece de sentido lógico (es para mínimo), por lo cual la solución es para x = 12, como se justifica a continuación, teniendo en cuenta que una función tiene un máximo relativo para los valores que anulan la primera derivada y hacen negativa la segunda derivada:

$$P''=4[-1(48-x)+(48-x)\cdot(-1)]=4\cdot(-48+x-48+x)=4\cdot(2x-96)=\underline{8\cdot(x-48)}.$$

$P''(12)=8\cdot(12-48)=8\cdot(-36)<0 \Rightarrow$ <u>Máximo</u>, como queríamos justificar.

$$y=48-x=48-12=\underline{36}.$$

<u>Los números pedidos son 12 y 36, respectivamente.</u>

****

4º) a) Encuentre una primitiva de la función $f(x)=x^2e^x$.

b) Calcule la siguiente integral definida: $I=\int_0^1 x^2e^x \cdot dx$.

----

a)

$$I=\int x^2 \cdot e^x \cdot dx \Rightarrow \begin{Bmatrix} u=x^2 \rightarrow du=2x\,dx \\ dv=e^x \cdot dx \rightarrow v=e^x \end{Bmatrix} \Rightarrow I=x^2 \cdot e^x-\int e^x \cdot 2x \cdot dx=\underline{x^2 \cdot e^x-2I_1=I} \qquad (*)$$

$$I_1=\int x \cdot e^x \cdot dx \Rightarrow \begin{Bmatrix} u=x \rightarrow du=dx \\ dv=e^x \cdot dx \rightarrow v=e^x \end{Bmatrix} \Rightarrow I_1=x \cdot e^x-\int e^x \cdot dx=x \cdot e^x-e^x+C=$$

$$=\underline{e^x(x-1)+C=I_1}.$$

Sustituyendo el valor obtenido de I_1 en (*), resulta:

$$I=x^2 \cdot e^x-2I_1=x^2 \cdot e^x-2e^x(x-1)+C=\underline{\underline{e^x(x^2-2x+2)+C=I}}$$

b)

$$I=\int_0^1 x^2 \cdot e^x \cdot dx=\left[e^x(x^2-2x+2)\right]_0^1=\left[e^1(1^2-2\cdot 1+2)\right]-\left[e^0(0-0+2)\right]=e(1-2+2)-1\cdot 2=$$

$$=\underline{\underline{e-2=I}}.$$

****