PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No esté permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas. No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

OPCIÓN A

1º) a) Discuta el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} x+y+az=1 \\ x+ay+z=a \\ ax+y+z=1 \end{array}\right\}$ en función del parámetro a.

b) Si es posible, resuélvalo para el valor de $a=-2$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}\ y\ M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro a es:

$$Rang\ M=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}=a+a+a-a^3-1-1=-a^3+3a-2=0;$$

$a^3-3a+2=0.$ Resolviendo por Ruffini: $a_1=a_2=1, a_3=-2$.

$$\underline{Para\ \left\{\begin{array}{c} a\neq 1 \\ a\neq -2 \end{array}\right\} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=1\ es\ M'=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \boldsymbol{Rang\ M'=1}.$$

$$\underline{Para\ a=1\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=1<nº\ incóg.\Rightarrow S.C.I.}$$

(con dos grados de libertad)

$$Para\ a=-2\ es\ M'=\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\1&-2&1&-2\\-2&1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \{C_2=C_4\}\Rightarrow \boldsymbol{Rang\ M'=2}.$$

$$\underline{Para\ a=-2\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg.\Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$

Para $a=-2$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r}x+y-2z=1\\x-2y+z=-2\\-2x+y+z=1\end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado. Despreciando una ecuación (tercera) y haciendo $z=\lambda$:

$$\left.\begin{array}{r}x+y=1+2\lambda\\x-2y=-2-\lambda\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{r}x+y=1+2\lambda\\-x+2y=2+\lambda\end{array}\right\}\Rightarrow 3y=3+3\lambda;\ \ y=1+\lambda.$$

$x+y=1+2\lambda;\ \ x+1+\lambda=1+2\lambda;\ \ x=\lambda.$

$$\underline{Solución: x=\lambda, y=1+\lambda, z=\lambda, \forall\lambda\in R.}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

2º) Tres de los cuatro vértices de un tetraedro son los puntos $A(2,1,0)$, $B(3,4,0)$ y $C(5,1,0)$. El cuarto vértice D está en la recta r que pasa por el punto $P(1,2,3)$ y tiene como vector director el vector $\overrightarrow{v_r} = (-1,1,1)$.

a) Determina las ecuaciones paramétricas de r.

b) Calcule las coordenadas del vértice D para que el volumen del tetraedro sea 9.
Observación: Hay dos soluciones distintas; basta con calcular una de ellas.

----

a)

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es: $\underline{r \equiv \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 3+\lambda \end{cases}}$.

b)

Los puntos A, B y C, por tener los tres la tercera componente nula, son coplanarios; el plano que los contiene es $\pi \equiv z = 0$.

$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(3,4,0) - (2,1,0)] = (1,3,0)$.

$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(5,1,0) - (2,1,0)] = (3,0,0)$.

Un punto genérico de r es $Q(1+\lambda, 2+\lambda, 3+\lambda)$.

Sabiendo que el volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los vectores que lo determinan:

$\overrightarrow{AD} = [D - A] = [(1-\lambda, 2+\lambda, 3+\lambda) - (2,1,0)] = (-1-\lambda, 1+\lambda, 3+\lambda)$.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1-\lambda & 1+\lambda & 3+\lambda \end{matrix} \right\| = 9; \quad \left\| \begin{matrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1-\lambda & 1+\lambda & 3+\lambda \end{matrix} \right\| = 54;$$

$$\left| (3+\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right| = 54; \ |-9 \cdot (3+\lambda)| = 54; \ \ |3+\lambda| = 6.$$

$$\left.\begin{array}{r} 3+\lambda = 6 \\ -3-\lambda = 6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \boldsymbol{\lambda_1 = 3} \\ \rightarrow \boldsymbol{\lambda_2 = -9} \end{array}. \qquad Q(1-\lambda, 2+\lambda, 3+\lambda).$$

$\underline{\lambda_1 = 3 \ \Rightarrow \ Q_1(-2,5,6)}$. $\qquad \underline{\lambda_2 = -9 \ \Rightarrow \ Q_2(10,-7,-6)}$.

****

3º) a) Calcule $\lim_{x\to 0^-} \frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}$. b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}$.

c) ¿Es continua la función $f(x) = \frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}$ en $x = 0$? Justifique la respuesta.

----

a)

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}} = \frac{2+e^{\frac{1}{0^-}}}{1+e^{\frac{2}{0^-}}} = \frac{2+e^{-\infty}}{1+e^{-\infty}} = \frac{2+\frac{1}{e^{\infty}}}{1+\frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{2+\frac{1}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{2+0}{1+0} = \underline{2}.$$

b)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}} = \frac{2+e^{\frac{1}{0^+}}}{1+e^{\frac{2}{0^+}}} = \frac{2+e^{+\infty}}{1+e^{+\infty}} = \frac{2+\infty}{1+\infty} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{2}{x^2}\cdot e^{\frac{2}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{2}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2\cdot e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2\cdot e^{\frac{1}{0}}} = \frac{1}{2\cdot e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = \underline{0}.$$

c)

Una función es continua en un punto cuando sus límites laterales en ese punto son iguales e igual al valor de la función en ese punto. Como quiera que los límites laterales de la función $f(x) = \frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}$ en $x = 0$ son distintos, como se puede observar en los apartados a) y b):

$$\underline{La\ función\ f(x)\ no\ es\ continua\ en\ x = 0.}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

4º) a) Calcule la integral indefinida $I = \int 2x \cdot arc\ tg\ x \cdot dx$.

b) De todas las primitivas de la función $f(x) = 2x \cdot arc\ tg\ x$, encuentre la que pasa por el punto $P(0, -2)$.

----

a)

$$I = \int 2x \cdot arc\ tg\ x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = arc\ tg\ x \rightarrow du = \frac{dx}{x^2+1} \\ 2x \cdot dx = dv \rightarrow v = x^2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (arc\ tg\ x) \cdot x^2 - \int x^2 \cdot \frac{dx}{x^2+1} = x^2 \cdot arc\ tg\ x - \int \frac{x^2}{x^2+1} \cdot dx =$$

$$= x^2 \cdot arc\ tg\ x - \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} \cdot dx = x^2 \cdot arc\ tg\ x - \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) \cdot dx =$$

$$= x^2 \cdot arc\ tg\ x - \int dx + \int \frac{1}{x^2+1} \cdot dx = x^2 \cdot arc\ tg\ x - x + arc\ tg\ x + C.$$

$$\underline{I = \int 2x \cdot arc\ tg\ x \cdot dx = (x^2+1) \cdot arc\ tg\ x - x + C.}$$

b)

$$F(x) = \int f(x) \cdot dx = (x^2+1) \cdot arc\ tg\ x - x + C.$$

Por pasar $F(x)$ por $P(0, -2)$ es $F(0) = -2$:

$$F(0) = -2 \ \Rightarrow \ (0+1) \cdot arc\ tg\ 0 - 0 + C = -2 \ \Rightarrow \boldsymbol{C = -2}.$$

$$\underline{F(x) = (x^2+1) \cdot arc\ tg\ x - x - 2.}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

OPCIÓN B

1º) Observación: Los apartados $a)$ y $b)$ de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.

Se dice que una matriz cuadrada A es involutiva si cumple $A^2 = I$, donde I denota la matriz identidad.

$a)$ Justifique razonadamente que toda matriz involutiva es regular (o invertible).

$b)$ Determine para qué valores de los parámetros α y b la siguiente matriz es involutiva: $A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & -a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

$a)$

Una matriz A es involutiva si $A^2 = I$, o sea, cuando $A \cdot A = I$. Por otra parte, por definición de matriz inversa se cumple que $A \cdot A^{-1} = I$, de donde se deduce que toda matriz involutiva es la inversa de si misma.

$$\underline{Toda\ matriz\ A\ involutiva\ es\ la\ inversa\ de\ si\ misma, por\ tanto\ es\ invertible.}$$

$b)$

$$A^2 = I \Rightarrow \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & -a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & -a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + a^2 & a^2 - a^2 & 0 \\ a^2 - a^2 & a^2 + a^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} 2a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}};\ \ \underline{b = \pm 1}.$$

****

www.yoquieroaprobar.es

2º) Observación: Los apartados $a)$ y $b)$ de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.

Considere la recta $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y + z = -7$:

$a)$ Compruebe que la recta r corta al plano π y calcule el ángulo que forman.

$b)$ Determine el plano β que pasa por el punto $P(2, -3, 3)$, es paralelo a la recta r y es perpendicular al plano π.

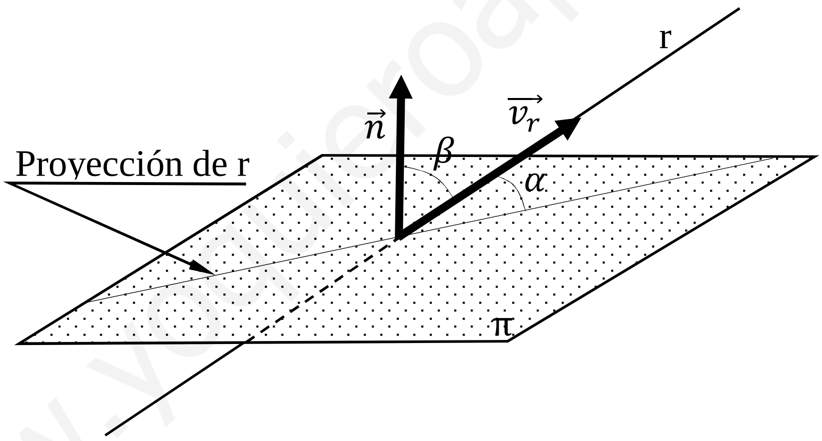
$a)$

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (1, -1, 2)$.

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (2, 1, 1)$.

El vector director de r y el vector normal de π son linealmente independientes por no tener proporcionales sus componentes, por lo cual:

$$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes.}$$



Por definición de producto escalar: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{v_r} = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{v_r}| \cdot \cos\beta$.

$\cos\beta = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{v_r}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{v_r}|}$. Por ser $\alpha\ y\ \beta$ complementarios: $\boldsymbol{sen\ \alpha} = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{v_r}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{v_r}|}$.

$sen\ \alpha = \frac{(2,1,1) \cdot (1,-1,2)}{\sqrt{2^2+1^2+1^2} \cdot \sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{2-1+2}{\sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{1+1+4}} = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 30°}.$

$$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ forman\ un\ ángulo\ de\ 30°.}$$

$b)$

El plano β, por ser paralelo a la recta r y perpendicular al plano π, tiene como vectores directores al vector director de la recta y al vector normal del plano; teniendo en cuenta que contiene al punto $P(2, -3, 3)$, su ecuación general o implícita es la siguiente:

$$\beta(P;\ \overrightarrow{v_r}, \vec{n}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-(x-2)+4(y+3)+(z-3)+2(z-3)-2(x-2)-(y+3)=0;$$

$$-3(x-2)+3(y+3)+3(z-3)=0;\ \ (x-2)-(y+3)-(z-3)=0;$$

$$x-2-y-3-z+3=0\ \ \Rightarrow\ \ \underline{\beta \equiv x-y-z-2=0}.$$

****

www.yoquieroaprobar.es

3º) Considere la función dada por $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 3 & si \ \ x \leq 1 \\ L(x^2) + b & si \ \ x > 1 \end{cases}$. Determine los valores de los parámetros a y b para los cuales la función $f(x)$ es continua y derivable en todo R.

La función f(x) es continua $\forall a, b \in R$, excepto para $x = 1$, cuya continuidad se estudia a continuación.

Para que la función sea continua en $x = 1$ es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 + ax - 3) = a - 2 = f(1) \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} [L(x^2) + b] = b \end{array}\right\} \Rightarrow a - 2 = b; \ \ \boldsymbol{a - b = 2}.$$

La función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 3 & si \ \ x \leq 1 \\ L(x^2) + b & si \ \ x > 1 \end{cases}$, es derivable $\forall a, b \in R$, excepto para el valor $x = 1$, cuya derivabilidad vamos a estudiar.

Una función es derivable en un punto cuando es continua en ese punto y, además, sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & si \ x \leq 1 \\ \frac{2}{x} & si \ x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(1) = \begin{cases} 2 + a & si \ x \leq 1 \\ 2 & si \ \ x > 1 \end{cases} \Rightarrow 2 + a = 2 \Rightarrow \boldsymbol{a = 0}.$$

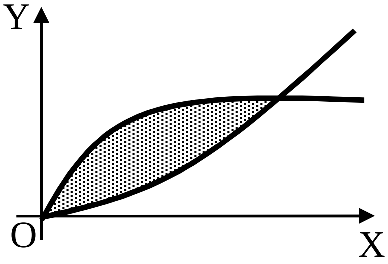
Sustituyendo en la ecuación $a - b = 2 \ \Rightarrow \boldsymbol{b = -2}$.

<u>La función $f(x)$ $es\ continua\ y\ derivable\ en\ R\ para\ a = 0\ y\ b = -2$.</u>

****

www.yoquieroaprobar.es

4º) Considere el recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = 2sen\ x$ y $g(x) = tg\ x$ en el primer cuadrante del plano XY, que está representado en la figura adjunta.



a) Determine los puntos de corte de dichas funciones.

b) Calcule el área de dicho recinto.

----

a)

Los puntos de corte se obtienen de la resolución de la ecuación que resulta de la igualación de las expresiones de las dos funciones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2sen\ x = tg\ x;\ \ 2sen\ x = \frac{sen\ x}{\cos x};\ \ 2sen\ x \cdot \cos x = sen\ x;$$

$$2sen\ x \cdot \cos x - sen\ x = 0;\ \ sen\ x \cdot (2 \cdot cos\ x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} sen\ x = 0 \to \boldsymbol{x_1 = 0} \\ cos\ x = \frac{1}{2} \to \boldsymbol{x_2 = \frac{\pi}{3}} \end{cases}.$$

$$\underline{Las\ funciones\ f(x)\ y\ g(x)\ se\ cortan\ en\ los\ punto\ O(0, 0)\ y\ A\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right).}$$

b)

Considerando un punto del intervalo $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, por ejemplo $x = \frac{\pi}{6}$, resulta que en el intervalo dado las ordenadas de las funciones son:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2sen\ \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ y } g\left(\frac{\pi}{6}\right) = tg\ \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} < 1\ \Rightarrow\ \boldsymbol{f(x) > g(x)}.$$

Teniendo en cuenta lo anterior, el área pedida es la siguiente:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{3}} [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2sen\ x - tg\ x) \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} sen\ x \cdot dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} tg\ x \cdot dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} sen\ x \cdot dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^0 tg\ x \cdot dx = \boldsymbol{2A + B}.$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} sen\ x \cdot dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{3}} = [\cos x]_{\frac{\pi}{3}}^0 = \cos 0 - \cos\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}.$$

$$B = \int_{\frac{\pi}{3}}^0 tg\ x \cdot dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \frac{sen\ x}{\cos x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c|l} \cos x = t & x = 0 \to t = 1 \\ sen\ x \cdot dx = -dt & x = \frac{\pi}{3} \to t = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{-dt}{t} = -\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{t} = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} = [Lt]_1^{\frac{1}{2}} = L\frac{1}{2} - L1 = L1 - L2 - 0 = \boldsymbol{-L2}.$$

www.yoquieroaprobar.es

Sustituyendo los valores obtenidos de A y B:

$S = 2A + B = 2 \cdot \frac{1}{1} - L2 = 1 - L2.$

$$\underline{El\ \text{área}\ pedida\ es, aproximadamente, (1 - L2) \cong 0{,}31\ u^2}.$$

****

www.yoquieroaprobar.es