PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

SEPTIEMBRE – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No esté permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas. No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

OPCIÓN A

1º) Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcule $C = A^t \cdot A - B \cdot B^t$, donde A^t y B^t denotan, respectivamente, las matrices traspuestas de A y B.

$b)$ Halle una matriz X tal que $X \cdot C = D$, siendo $D = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

$a)$

Las traspuestas son $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B^t = (0 \quad 1)$.

$$C = A^t \cdot A - B \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (0 \quad 1) =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$b)$

$$X \cdot C = D; \;\; X \cdot C \cdot C^{-1} = D \cdot C^{-1}; \;\; X \cdot I = D \cdot C^{-1} \;\; \Rightarrow \;\; \underline{X = D \cdot C^{-1}}. \quad (*)$$

$$(C|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to ½F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - 2F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to -F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 - F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \boldsymbol{C^{-1}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido:

$$X = D \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) Se llama mediana de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por el vértice de un triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice.

a) Los vértices de un triángulo son A (5, 3, 6), B (-1. -1, 2) y C (5, 7, 4). Calcule los puntos medios de sus lados.

b) Calcule las ecuaciones de las tres medianas de dicho triángulo.

c) Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto y calcule las coordenadas de dicho punto.

----

a)

$$M_{\overline{AB}} \equiv \left(\frac{5-1}{2}, \frac{3-1}{2}, \frac{6+2}{2}\right) \equiv \underline{(2, 1, 4)}.$$

$$M_{\overline{AC}} \equiv \left(\frac{5+5}{2}, \frac{3+7}{2}, \frac{6+4}{2}\right) \equiv \underline{(5, 5, 5)}.$$

$$M_{\overline{BC}} \equiv \left(\frac{-1+5}{2}, \frac{-1+7}{2}, \frac{2+4}{2}\right) \equiv \underline{(2, 3, 3)}.$$

b)

El vector director de la mediana que pasa por A (5, 3, 6) y $M_{\overline{BC}} \equiv (2, 3, 3)$ es el siguiente: $\overrightarrow{M_{\overline{BC}}A} = (3, 0, 3)$.

La mediana que pasa por A y $M_{\overline{BC}}$ es: $\underline{m_1 \equiv \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 3 \\ z = 6 + \lambda \end{cases}}$.

El vector director de la mediana que pasa por B (-1, -1, 2) y $M_{\overline{AC}} \equiv (5, 5, 5)$ es el siguiente: $\overrightarrow{M_{\overline{AC}}B} = (-6, -6, -3)$.

La mediana que pasa por B y $M_{\overline{AC}}$ es: $\underline{m_2 \equiv \begin{cases} x = 5 + 2\mu \\ y = 5 + 2\mu \\ z = 5 + \mu \end{cases}}$.

El vector director de la mediana que pasa por C (5, 7, 4) y $M_{\overline{AB}} \equiv (2, 1, 4)$ es el siguiente: $\overrightarrow{M_{\overline{AB}}C} = (3, 6, 0)$.

La mediana que pasa por C y $M_{\overline{AB}}$ es: $\underline{m_3 \equiv \begin{cases} x = 5 + \gamma \\ y = 7 + 2\gamma \\ z = 4 \end{cases}}$.

c)

El punto de corte de m_1 y m_2: $\begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 3 \\ z = 6 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 + 2\mu \\ y = 5 + 2\mu \\ z = 5 + \mu \end{cases}$.

$$\left.\begin{array}{r} 5+\lambda=5+2\mu \\ 3=5+2\mu \end{array}\right\} \Rightarrow 5+\lambda=3;\ \ \lambda=-2;\ \ \mu=-1\ \ \Rightarrow\ \ \boldsymbol{B(3,3,4)}.$$

El punto de corte de $m_1\ y\ m_3$: $\begin{cases} x=5+\lambda \\ y=3 \\ z=6+\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5+\gamma \\ y=7+2\gamma \\ z=4 \end{cases}.$

$$\left.\begin{array}{r} 5+\lambda=5+\gamma \\ 3=7+2\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma=\lambda=-2\ \ \Rightarrow\ \ \boldsymbol{B(3,3,4)}.$$

$\underline{Se\ compreba\ que\ las\ medianas\ se\ cortan\ en\ un\ punto\ llamado\ baricentro}$**.**

$\underline{El\ baricentro\ es\ el\ punto\ B(3,3,4)}.$

****

3º) Observación: Los apartados a) y b) de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.

Calcule los siguientes límites: $a)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-6}{x+1}\right)^{\frac{x^2+5}{x+3}}$. $\qquad b)\ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)$.

$a)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-6}{x+1}\right)^{\frac{x^2+5}{x+3}} = 1^\infty \Rightarrow Indet.tipo\ nº\ e\ \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1-7}{x+1}\right)^{\frac{x^2+5}{x+3}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-7}{x+1}\right)^{\frac{x^2+5}{x+3}} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x+1}{-7}}\right)^{\frac{x^2+5}{x+3}} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x+1}{-7}}\right)^{\frac{x+1}{-7}\cdot\frac{-7}{x+1}\cdot\frac{x^2+5}{x+3}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+1}{-7}}\right)^{\frac{x+1}{-7}}\right]^{\frac{-7}{x+1}\cdot\frac{x^2+5}{x+3}} = \left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x+1}{-7}}\right)^{\frac{x+1}{-7}}\right]^{\frac{-7x^2-35}{x^2+4x+3}} = \underline{e^{-7} = \frac{1}{e^7}}.$$

$$b)\ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{0}-\frac{1}{0} = \infty-\infty \Rightarrow Indet. \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{1-x}{x^2} = \frac{1}{0^+} = \underline{+\infty}.$$

****

4º) a) Calcule la integral indefinida $\int tg^2x \cdot dx$.

b) De todas las primitivas de la función $f(x) = tg^2x$, encuentre la que pasa por el punto $P\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$.

----

a)

Teniendo en cuenta que $\int(1 + tg^2x) \cdot dx = tg\ x$, puede hacerse lo siguiente:

$\int tg^2x \cdot dx = \int(1 + tg^2x - 1) \cdot dx = \int(1 + tg^2x) \cdot dx - \int dx =$

$= tg\ x - x + C.$

$$\underline{\int tg^2x \cdot dx = tg\ x - x + C.}$$

b)

Siendo $F(x) = tg\ x - x + C$, tiene que cumplirse que $F_{\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 1$:

$tg\ \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + C = 1;\ \ 1 - \frac{\pi}{4} + C = 1\ \Rightarrow \boldsymbol{C = \frac{\pi}{4}}.$

$$\underline{F(x) = tg\ x - x + \frac{\pi}{4}.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Observación: Los apartados a) y b) de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.

Se dice que una matriz cuadrada A es idempotente si cumple $A^2 = A$.

a) Si A es una matriz idempotente, calcule razonadamente A^{2015}.

b) Determine para qué valores de los parámetros ɑ y b la siguiente matriz es idempotente: $A = \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ -a & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

----

a)

$$A^{2015} = A^{2014} \cdot A = (A^2)^{1007} \cdot A = A^{1007} \cdot A = A^{1008} = \underline{A}.$$

b)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ -a & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ -a & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2 & -2a^2 & 0 \\ -2a^2 & 2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = A \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2a^2 = a \\ b = b^2 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 2a^2 - a = 0 \\ b^2 - b = 0 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} a(2a-1) = 0 \\ b(b-1) = 0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \rightarrow \boldsymbol{a_1 = 0;\ a_2 = \frac{1}{2}} \\ \rightarrow \boldsymbol{b_1 = 0;\ b_2 = 1} \end{matrix}.$$

$\underline{La\ matriz\ A\ es\ idempotente\ para\ los\ pares\ de\ valores\ (a, b)\ siguienrtes}$:

$$\underline{(0, 0), (0, 1), (½, 0), (½, 1)}$$

****

2º) Observación: Los apartados a) y b) de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.

Considere la recta $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{5}$ y el plano $\pi \equiv x - 2y + z = -3$:

a) Compruebe que la recta r es paralela al plano π y calcule la distancia entre ellos.

b) Determine la recta s que pasa por el punto P (1, 0, 2) y es perpendicular al plano π. Calcule la intersección de dicha recta con el plano π.

----

a)

Una recta y un plano son paralelos cuando el vector director de la recta y es vector normal del plano son perpendiculares, es decir, cuando su producto escalar es 0.

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r} = (3, 4, 5)$ y un vector normal del plano π es $\vec{n} = (1, -2, 1)$.

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = (3, 4, 5) \cdot (1, -2, 1) = 3 - 8 + 5 = \mathbf{0}.$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ la\ rect\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ paralelos.}$$

La distancia de la recta r al plano π es la misma que la distancia de un punto de la recta al plano. Un punto de r es $A(1, 0, 2)$.

La distancia de un punto a un plano es: $d(P;\ \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$:

$$d(r;\ \pi) = d(A;\ \pi) = \frac{|1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|1 - 0 + 2 + 3|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{|+6|}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \underline{\sqrt{6}\ unidades}.$$

b)

La recta s tiene como vector director al vector director del plano; su expresión dada por unas ecuaciones paramétricas es:

$$\underline{s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}}.$$

El punto de intersección de la recta s con el plano π es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x - 2y + z = -3 \\ s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow (1 + \lambda) - 2(-2\lambda) + (2 + \lambda) = -3;$$

$1 + \lambda + 4\lambda + 2 + \lambda = -3; \;\; 6\lambda = -6 \Rightarrow \boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{1}.$

$\underline{El\ punto\ de\ intersección\ del\ plano\ \pi\ con\ la\ recta\ r\ es\ Q(0, 2, 1)}.$

****

3º) Observación: Los apartados $a)$ y $b)$ de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.

Calcule los máximos y mínimos de las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = x \cdot Lx,\ con\ x > 0.$ $\qquad$ $b)\ g(x) = \frac{x^2}{e^x}, con\ x \in R.$

Una función tiene un extremo relativo (máximo o mínimo) cuando se anula su primera derivada. Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera, se trate de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$a)$

$$f'(x) = 1 \cdot Lx + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + Lx.$$

$$f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ 1 + Lx = 0;\ \ Lx = -1\ \Rightarrow \boldsymbol{x = \frac{1}{e}}.$$

$$f''(x) = \frac{1}{x}\ \ \Rightarrow\ \ f''\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e > 0\ \ \Rightarrow\ \ \boldsymbol{Mínimo\ relativo\ para\ x = \frac{1}{e}}.$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot L\frac{1}{e} = \frac{1}{e} \cdot (L1 - Le) = \frac{1}{e} \cdot (0 - 1) = -\frac{1}{e}\ \Rightarrow\ \underline{Mín. \Rightarrow P\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)}.$$

$b)$

$$g'(x) = \frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{x \cdot e^x \cdot (2-x)}{e^{2x}} = \frac{x \cdot (2-x)}{e^x} = \frac{2x - x^2}{e^x}.$$

$$g'(x) = 0\ \Rightarrow\ \frac{x \cdot (2-x)}{e^x} = 0;\ \ x(2-x) = 0\ \Rightarrow\ \boldsymbol{x_1 = 0, x_2 = 2}.$$

$$g''(x) = \frac{(2-2x) \cdot e^x - x \cdot (2-x) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x \cdot (2 - 2x - 2x + x^2)}{e^{2x}} = \frac{x^2 - 4x + 2}{e^x}.$$

$$g''(0) = \frac{2}{e^0} = 2 > 0\ \Rightarrow \boldsymbol{Mínimo\ relativo\ para\ x = 0}.$$

$$g(0) = \frac{0}{e^0} = \frac{0}{1} = 0\ \ \Rightarrow\ \ \underline{Mín. \Rightarrow O(0,0)}.$$

$$g''(2) = \frac{4-8+2}{e^2} = \frac{-2}{e^2} < 0\ \Rightarrow \boldsymbol{Máximo\ relativo\ para\ x = 2}.$$

$$g(2) = \frac{2^2}{e^2} = \frac{4}{e^2}\ \ \Rightarrow\ \ \underline{Máx. \Rightarrow Q\left(2, \frac{4}{e^2}\right)}.$$

****

4º) a) Calcule la integral indefinida $\int L\,(1+x^2)\cdot dx$.

b) De todas las primitivas de la función $f(x) = L\,(1+x^2)$, encuentre la que pasa por el punto P (0, -2).

----

a)

$$\int L\,(1+x^2)\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} u = L(1+x^2) \to du = \frac{2x\cdot dx}{1+x^2} \\ dx = dv \to v = x \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cdot L(1+x^2) - \int x\cdot\frac{2x\cdot dx}{1+x^2} = x\cdot L(1+x^2) - 2\int\frac{x^2}{1+x^2}\cdot dx =$$

$$= x\cdot L(1+x^2) - 2\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}\cdot dx = x\cdot L(1+x^2) - 2\int\frac{1+x^2}{1+x^2}\cdot dx + 2\int\frac{1}{1+x^2}dx =$$

$$= \underline{x\cdot L(1+x^2) - 2x + 2\cdot arc\ tg\ x + C}.$$

b)

Siendo la función primitiva $F(x) = x\cdot L(1+x^2) - 2x + 2\cdot arc\ tg\ x + C$, tiene que cumplirse que $F(0) = -2$:

$$F(0) = 0\cdot L(1+0) - 0 + 2\cdot arc\ tg\ 0 + C = \boldsymbol{C = -2}.$$

$$\underline{F(x) = x\cdot L(1+x^2) - 2x + 2\cdot arc\ tg\ x - 2}$$

****