PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

SEPTIEMBRE – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas. No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

OPCIÓN A

1º) Considere la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} sen\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -sen\,\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcule el determinante de A.

$b)$ Calcule las potencias sucesivas $A^2, A^3, A^4\ y\ A^5$. Calcule A^{2016}.

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} sen\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -sen\,\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -sen^2x - cos^2x = -1.$$

$$\underline{|A| = -1}.$$

$b)$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} sen\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -sen\,\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} sen\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -sen\,\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} sen^2x + cos^2x & \cos x \cdot sen\,x - sen\,x \cdot \cos x & 0 \\ \cos x \cdot sen\,x - sen\,x \cdot \cos x & cos^2x + sen^2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \underline{A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I}.$$

$A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = A \;\Rightarrow\; \underline{A^3 = A}.$

$A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = I \;\Rightarrow\; \underline{A^4 = I}.$

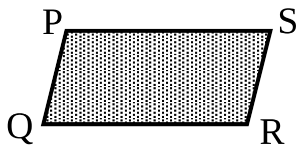
$A^5 = A^4 \cdot A = I \cdot A = I \;\Rightarrow\; \underline{A^5 = I}.$

En general A^n es igual que A o I, según que n sea impar o par, respectivamente.

$$\underline{A^{2016} \rightarrow n\; par \;\Rightarrow\; A^{2016} = I}.$$

****

2º) Los puntos $P(1,1,1)$, $Q(2,2,2)$ y $R(1,3,3)$ son tres vértices consecutivos del siguiente paralelogramo:



$a)$ Calcule el área del paralelogramo.

$b)$ Determine el cuarto vértice del paralelogramo.

$a)$

Los puntos P, Q y R determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = [(2,2,2) - (1,1,1)] = (1,1,1).$$

$$\overrightarrow{PR} = [R - P] = [(1,3,3) - (1,1,1)] = (0,2,2).$$

El área del paralelogramo que determinan dos vectores linealmente independientes es el módulo de su producto vectorial:

$$S_{PQRS} = \left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = \left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{matrix}\right\| = |2i + 2k - 2i - 2j| = |2j - 2k| =$$

$$= 2 \cdot |j - k| = 2 \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2} = 2 \cdot \sqrt{1+1} = 2\sqrt{2}.$$

$$\underline{S_{PQRS} = 2\sqrt{2}\, u^2.}$$

$b)$

Siendo $S(x, y, z)$ tiene que ser $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$:

$$(1,1,1) = [R - S] = [(1,3,3) - (x, y, z)] = (1 - x, 3 - y, 3 - z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} 1 = 1 - x \rightarrow x = 0 \\ 1 = 3 - y \rightarrow y = 2 \\ 1 = 3 - z \rightarrow z = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{S(0,2,2)}.$$

****

3º) Dada la función $f(x) = e^{\frac{2x}{1+x^2}}$, se pide

a) Estudie las asíntotas de la gráfica de $f(x)$.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de la función.

----

a)

Asíntotas verticales: son los valores finitos que hacen que la función valga más infinito o menos infinito.

$$e^{\frac{2x}{1+x^2}}\ es\ finito\ \forall x \in R \ \Rightarrow\ \underline{f(x)\ no\ tiene\ asíntotas\ verticales.}$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$, siendo k los valores finitos que toma la función cuando x tiende a más infinito o menos infinito:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{2x}{1+x^2}} = e^0 = 1.$$

$$\underline{La\ recta\ y = 1\ es\ asíntota\ horizontal\ en\ \pm\infty\ de\ la\ función.}$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

b)

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{2\cdot(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} \cdot e^{\frac{2x}{1+x^2}} = \frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2} \cdot e^{\frac{2x}{1+x^2}} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} \cdot e^{\frac{2x}{1+x^2}}.$$

Por ser $(1+x^2)^2 > 0, \forall x \in R$ y $e^{\frac{2x}{1+x^2}} > 0, \forall x \in R, f'(x)$ es positiva o negativa cuando lo sea la expresión $2 - 2x^2$:

$$2 - 2x^2 = 2(1 - x^2) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$$

Teniendo en cuenta que $f(x)$ es continua en su dominio, que es R, las raíces de la primera derivada dividen su dominio en tres intervalos alternativos de crecimiento y decrecimiento. Para determinar los intervalos que son crecientes o decrecientes se estudia un punto de uno de ellos, por ejemplo $x = 0$:

$$f'(0) = \frac{2-0}{(1+0)^2} \cdot e^{\frac{0}{1+0}} = 2 \cdot 1 = 2 > 0 \to Creciente.$$

Los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-1, 1)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)}.$$

Una función tiene un máximo o un mínimo relativo para los valores de x que anulan la primera derivada; para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera derivada se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

No obstante lo anterior y debido a la complejidad de la segunda derivada, se deducen los máximos y mínimos por los periodos de crecimiento y decrecimiento.

$Mínimo\ relativo\ para\ x = -1\ y\ máximo\ relativo\ para\ x = 1.$

$$f(-1) = e^{\frac{-2}{1+1}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \Rightarrow \underline{Mínimo\ obsoluto: A\left(-1, \frac{1}{e}\right)}.$$

$$f(1) = e^{\frac{2}{1+1}} = e^{1} = e \Rightarrow \underline{Máximo\ obsoluto: B(1, e)}.$$

****

4º) $a)$ Calcule la siguiente integral indefinida $I=\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\cdot dx$.

$b)$ Determine el valor de $a>0$ para que $\int_0^a \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\cdot dx=\frac{1}{4}$.

$a)$

$$I=\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} e^x=t \\ e^x\cdot dx=dt \\ dx=\frac{dt}{t} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \int \frac{t}{(1+t)^2}\cdot\frac{dt}{t}=\int \frac{1}{(1+t)^2}\cdot dt=$$

$$=\int (1+t)^{-2}\cdot dt=\frac{(1+t)^{-1}}{-1}+C=-\frac{1}{1+t}+C.$$

$$\underline{I=\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\cdot dx=-\frac{1}{1+e^x}+C.}$$

$b)$

Teniendo en cuenta la solución del apartado anterior:

$$\int_0^a \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\cdot dx=\frac{1}{4} \Rightarrow \left[-\frac{1}{1+e^x}\right]_0^a=\frac{1}{4};\ \ \left[\frac{1}{1+e^x}\right]_a^0=\frac{1}{4};\ \ \frac{1}{1+e^0}-\frac{1}{1+e^a}=\frac{1}{4};$$

$$\frac{1}{1+1}-\frac{1}{1+e^a}=\frac{1}{4};\ \ \frac{1}{2}-\frac{1}{1+e^a}=\frac{1}{4};\ \ \frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{1+e^a};\ \ \frac{1}{4}=\frac{1}{1+e^a} \Rightarrow 4=1+e^a;\ \ e^a=3 \Rightarrow$$

$$\underline{a=L3}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2$, calcule razonadamente los siguientes determinantes:

$a)\ \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix}.$ $\qquad b)\ \begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$

$a)$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -6 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -6 \cdot 2 = \underline{-12}.$$

$b)$

$$\begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y+0 & 3z-1 \\ 1+0 & 0+0 & 1+0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3x & 3y & 3z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 = \underline{6}.$$

En la realización de los dos apartados del ejercicio se han utilizado las siguientes propiedades de los determinantes:

1ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en dicha línea el primero y el segundo sumandos, respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial.

2ª.- Si un determinante tiene dos líneas paralelas iguales o proporcionales su valor es cero.

3ª.- Si se intercambian dos líneas de un determinante su valor cambia de signo.

4ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se multiplican o dividen por un número su valor queda multiplicado o dividido por dicho número.

5ª.- Si se rotan las líneas de un determinante no cambia su valor

****

2º) Considere el plano π que pasa por el punto $P(2,0,1)$ y tiene como vectores directores a los vectores $\vec{v}=(1,0,2)$ y $\vec{w}=(0,1,-2)$. Considere la recta r dada por la expresión $r\equiv \frac{x}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$.

a) Estudie la posición relativa de π y r.

b) Calcule la ecuación de la recta s que pasa por el punto $Q(-1,0,-2)$, es paralela a π y perpendicular a r.

----

a)

La expresión general del plano π es la siguiente:

$$\pi(P;\ \vec{v},\vec{w})\equiv\begin{vmatrix}x-2 & y & z-1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=0;\ \ (z-1)-2(x-2)+2y=0;$$

$$z-1-2x+4+2y\ \Rightarrow\ \pi\equiv 2x-2y-z-3=0.$$

La expresión de $r\equiv \frac{x}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$ por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$r\equiv\begin{cases}3x=2y+2\\ x=2z\end{cases}\text{ o mejor: } r\equiv\begin{cases}3x-2y-2=0\\ x-2z=0\end{cases}.$$

La recta r y el plano π determinan el sistema $\left.\begin{array}{r}3x-2y=2\\ x-2z=0\\ 2x-2y-z=3\end{array}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -2\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}\text{ y } M'=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0 & 2\\ 1 & 0 & -2 & 0\\ 2 & -2 & -1 & 3\end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de M y M’ pueden presentarse los siguientes casos:

1. -- Rango M = Rango M’ = 2 ⇛ La recta está contenida en el plano.

2. -- Rango M =2, Rango M’ = 3 ⇛ La recta es paralela al plano.

3. -- Rango M = Rango M’ = 3 ⇛ La recta es secante al plano.

$$Rang\ M\Rightarrow\begin{vmatrix}3 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -2\\ 2 & -2 & -1\end{vmatrix}=8-12-2=-6\neq 0\ \Rightarrow Rang\ M=3.$$

$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes.}$

$b)$

El vector director de s, por ser paralela al plano π, es perpendicular a su vector normal, que es $\vec{n} = (2, -2, -1)$.

También, el vector director de s, por ser perpendicular a r, tiene que ser perpendicular a su vector director, que es $\overrightarrow{v_r} = (2, 3, 1)$.

Un vector perpendicular a dos vectores dados es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de estos dos vectores:

$$\overrightarrow{v_s} = (\vec{n} \wedge \overrightarrow{v_r}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2i - 2j + 6k + 4k + 3i - 2j =$$

$$= i - 4j + 10k \;\Rightarrow\; \overrightarrow{v_s} = (1, -4, 10).$$

La expresión de s dada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas es:

$$\underline{s \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -4\lambda \\ z = -2 + 10\lambda \end{cases}}.$$

****

3º) Considere la función dada por $f(x) = \begin{cases} a + L(1-x) & si \;\; x < 0 \\ x^2 \cdot e^{-x} & si \;\; x \geq 0 \end{cases}$:

a) Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Determine el valor de a para que la función sea continua en todo R.

----

a)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} [a + L(1-x)] = L\infty = \underline{+\infty}.$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^2 \cdot e^{-x}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = \underline{0}.$$

b)

La función $f(x)$ es continua en $R \forall a \in R$. Se trata de determinar los valores de a para que sea derivable en su punto crítico $x = 0$.

Para que la función sea continua en un punto es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} [a + L(1-x)] = a + 0 = a \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{e^x} = \frac{0}{1} = f(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{a = 0}.$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ x = 0\ para\ a = 0}.$$

****

4º) a) Calcule la siguiente integral indefinida: $I=\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1} \cdot dx$.

b) Obtenga una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)=\frac{x^3+x+1}{x^2+1}$ que cumpla la condición $F(0)=2$.

----

a)

$$I=\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1} \cdot dx=\int\left(\frac{x^3+x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right) \cdot dx=\int\left(x+\frac{1}{x^2+1}\right) \cdot dx=$$

$$=\int x \cdot dx+\int \frac{1}{x^2+1} \cdot dx=\frac{x^2}{2}+arc\ tag\ x+C.$$

$$\underline{I=\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1} \cdot dx=\frac{x^2}{2}+arc\ tag\ x+C.}$$

b)

Teniendo en cuenta la solución del apartado anterior:

$$F(x)=\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1} \cdot dx=\frac{x^2}{2}+arc\ tag\ x+C.$$

$$F(0)=2 \Rightarrow 0+arc\ tag\ 0+C=2;\ \ 0+C=2 \Rightarrow C=2.$$

$$\underline{F(x)=\frac{x^2}{2}+arc\ tag\ x+2.}$$

****