PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

SEPTIEMBRE – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas. No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

OPCIÓN A

1º) Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Compruebe que las matrices A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus correspondientes matrices inversas.

b) Determine la matriz X que cumple la ecuación $A \cdot X \cdot B = A + B$.

----

a)

Una matriz es regular o invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0 \Rightarrow \underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible}.$$

La inversa de A se obtiene por el método de Gauss-Jordan.

$$(A/I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - 2F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{F_2 \to -\tfrac{1}{2}F_2\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 - 3F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}.$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2 \neq 0 \Rightarrow \underline{La\ matriz\ B\ es\ invertible}.$$

La inversa de B se obtiene por la adjunta de la traspuesta.

$B^t = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\qquad Adj. de\ B^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

$B^{-1} = \frac{Adj. de\ B^t}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}{2} \Rightarrow \underline{B^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}$.

$b)$

$A \cdot X \cdot B = A + B = S;\ \ A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot S \cdot B^{-1};$

$I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot S \cdot B^{-1} \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot S \cdot B^{-1}}$.

$S = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$X = A^{-1} \cdot S \cdot B^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -10 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\underline{X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) Considere la recta r que pasa por los puntos $A(1,1,1)\ y\ B(3,3,4)$ y la recta s cuyo vector director es $\overrightarrow{v_s}=(-1,3,1)$ y pasa por el punto $C(4,0,3)$.

a) Determine las ecuaciones continuas de $r\ y\ s$.

b) Estudie la posición relativa de $r\ y\ s$.

----

a)

Los puntos A y B determinan el vector $\overrightarrow{AB}$, que es director de la recta r.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{v_r}=[B-A]=[(3,3,4)-(1,1,1)]=(2,2,3)$.

Las expresiones de las rectas pedidas expresadas por ecuaciones paramétricas son las siguientes:

$$\underline{r\equiv\begin{cases}x=1+2\lambda\\y=1+2\lambda\\z=1+3\lambda\end{cases}}\ \ y\ \ \underline{s\equiv\begin{cases}x=4-\mu\\y=3\mu\\z=3+\mu\end{cases}}.$$

b)

Los vectores directores de las rectas $r\ y\ s$ son linealmente independientes por no tener proporcionales sus componentes, por lo cual, o se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso se determina un vector $\overrightarrow{w}$ que tiene como origen el punto A de r y como extremo el punto C de s; es el siguiente:

$\overrightarrow{w}=\overrightarrow{AC}=[C-A]=[(4,0,3)-(1,1,1)]=(3,-1,2)$.

Según que los vectores $\overrightarrow{v_r}\,,\overrightarrow{v_s}\ y\ \overrightarrow{w}$ sean coplanarios o no, las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}\,,\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{w}\}$ son coplanarios cuando su rango es menor que tres, es decir, cuando es cero el determinante de la matriz que forman:

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}\,,\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{w}\}\Rightarrow\begin{vmatrix}2&2&3\\-1&3&1\\3&-1&2\end{vmatrix}=12+3+6-27+2+4=0.$$

$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}\,,\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{w}\}<3\ \Rightarrow\ \underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cortan\ en\ un\ punto}.$

****

3º) Calcule los siguientes límites: $a)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^x$. $b)\ \lim_{x\to1}\left(\frac{1}{Lx}-\frac{1}{x-1}\right)$.

$a)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^x = 1^\infty \Rightarrow Indet.\ nº\ e \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3-4}{x+3}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-4}{x+3}\right)^x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x+3}{-4}}\right)^{\mathrm{x}} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x+3}{-4}}\right)^{x\cdot\frac{x+3}{-4}\cdot\frac{-4}{x+3}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+3}{-4}}\right)^{\frac{x+3}{-4}}\right]^{x\cdot\frac{-4}{x+3}} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+3}{-4}}\right)^{\frac{x+3}{-4}}\right]^{\frac{-4x}{x+3}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{x+3}} = e^{-4}.$$

$$\underline{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^x = e^{-4} = \frac{1}{e^4}}.$$

$b)$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{Lx}-\frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{L1}-\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0}-\frac{1}{0} = \infty-\infty \Rightarrow Indet. \Rightarrow \lim_{x\to1}\frac{x-1-Lx}{(x-1)Lx} =$$

$$= \frac{1-1-L1}{(1-1)L1} = \frac{1-1-0}{0\cdot0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to1}\frac{1-0-\frac{1}{x}}{1\cdot Lx+(x-1)\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to1}\frac{\frac{x-1}{x}}{Lx+\frac{x-1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{x-1}{x\cdot Lx+x-1} = \frac{1-1}{1\cdot0+1-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to1}\frac{1-0}{1\cdot Lx+x\cdot\frac{1}{x}+1-0} =$$

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{Lx+1+1} = \frac{1}{L1+2} = \frac{1}{0+2} = \frac{1}{2}.$$

$$\underline{\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{Lx}-\frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{2}}.$$

****

4º) a) Calcule la siguiente integral indefinida $I = \int \frac{\cos x \cdot sen^2 x}{1+sen^2 x} \cdot dx$.

b) Obtenga una primitiva $F(x)$ de la función $\frac{\cos x \cdot sen^2 x}{1+sen^2 x}$ que cumpla que $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

----

a)

$$I = \int \frac{\cos x \cdot sen^2 x}{1+sen^2 x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} sen\ x = t \\ \cos x \cdot dx = dt \end{matrix} \right\} \Rightarrow \int \frac{t^2}{1+t^2} \cdot dt = \int \frac{1+t^2-1}{1+t^2} \cdot dt =$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) \cdot dt = t - arc\ tag\ t + C = sen\ x - arc\ tag\ (sen\ x) + C.$$

$$\underline{I = \int \frac{\cos x \cdot sen^2 x}{1+sen^2 x} \cdot dx = sen\ x - arc\ tag\ (sen\ x) + C.}$$

b)

$$F(x) = \int \frac{\cos x \cdot sen^2 x}{1+sen^2 x} \cdot dx = sen\ x - arc\ tag\ (sen\ x) + C.$$

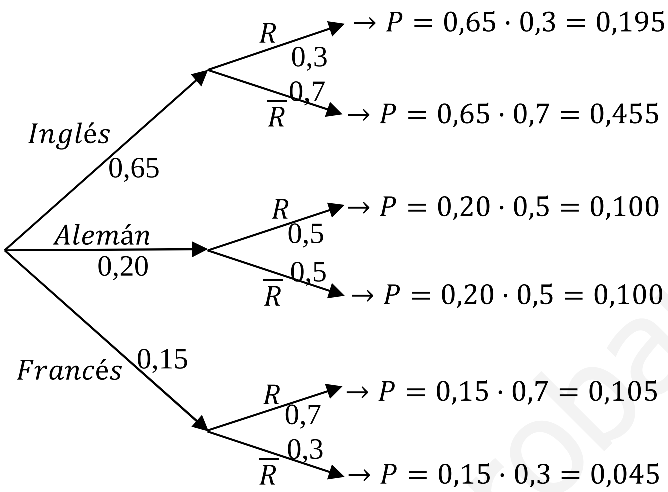
$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow sen\ \frac{\pi}{2} - arc\ tag\ \left(sen\ \frac{\pi}{2}\right) + C = 1;\ \ 1 - arc\ tag\ 1 + C = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = arc\ tag\ 1 = \frac{\pi}{4}.$$

$$\underline{F(x) = sen\ x - arc\ tag\ (sen\ x) + \frac{\pi}{4}.}$$

****

5º) En un colegio se imparten, como primer idioma, inglés, alemán y francés. El 65 % de los alumnos estudian inglés, el 20 % alemán y el recto francés. La asignatura de robótica es optativa y la elige el 30 % de los alumnos de inglés, el 50 % de los que estudian alemán y el 70 % de los que cursan francés. Se elige un alumno al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que estudie robótica?



$$P = P(R) = P(I) \cdot P(R/I) + P(A) \cdot P(R/A) + P(F) \cdot P(R/F) =$$

$$= 0{,}65 \cdot 0{,}3 + 0{,}20 \cdot 0{,}5 + 0{,}15 \cdot 0{,}7 = 0{,}195 + 0{,}100 + 0{,}105 = \underline{0{,}400}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Considere el sistema de ecuaciones $\begin{cases} ax+2y+z=1 \\ x+2ay+z=2 \\ x+2y+az=-3 \end{cases}$ en función del parámetro real a:

a) Determine para qué valores del parámetro a el sistema tiene solución única. No hay que resolverlo.

b) Determine para qué valor del parámetro a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) Determine para qué valor del parámetro a el sistema no tiene solución.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & 2a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} a & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2a & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a & -3 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & 2a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}=2a^3+2+2-2a-2a-2a=2a^3-6a+4=$$

$$=2(a^2-3a+2)=0;\ \ a^2-3a+2=0;\ \ a=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm1}{2}\Rightarrow\ a_1=1, a_2=2.$$

$$Para\ \begin{Bmatrix} a\neq 1 \\ a\neq 2 \end{Bmatrix}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg.\Rightarrow S.C.D.$$

$$\underline{El\ sistema\ tiene\ solución\ \text{única}\ \forall a\in R-\{1,2\}}.$$

b) c)

$$Para\ a=1\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$Para\ a=1\Rightarrow Rang\ M=1;\ Rang\ M'=2\Rightarrow Sistema\ incompatible.$$

$$Para\ a=2\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M'\Rightarrow\{C_1,C_2,C_3\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -24 + 2 + 4 - 4 - 8 + 6 = -24 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$Para\ a = 2 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.$$

$$\underline{El\ sistema\ no\ tiene\ solución\ para\ a = 1\ y\ para\ a = 2}.$$

$$\underline{No\ existen\ valores\ de\ a\ para\ que\ el\ sistema\ tenga\ infinitas\ soluciones}.$$

****

2º) Considere los puntos $A(1,1,1)$, $B(1,-1,0)$ y $C(0,-2,1)$.

$a)$ Calcule el área del triángulo ABC.

$b)$ Calcule la ecuación de la recta (en cualquiera de sus formas) contenidas en el plano que forman A, B y C que, pasando por A, es perpendicular al lado BC.

$a)$

Los puntos A, B y C determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(1,-1,0) - (1,1,1)] = (0,-2,-1).$$

$$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(0,-2,1) - (1,1,1)] = (-1,-3,0).$$

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan los puntos:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \right\| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |j - 2k - 3i| = \frac{1}{2} \cdot |-3i + j - 2k| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + (-2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{9 + 1 + 4} = \underline{\frac{\sqrt{14}}{2}\ u^2}.$$

$b)$

El plano α que contiene a los puntos A, B y C es el siguiente:

$$\alpha\left(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(y-1) - 2(z-1) - 3(x-1) = 0;\ \ y - 1 - 2z + 2 - 3x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 2z - 3x + 4 = 0;\ -3x + y - 2z + 4 = 0;\ \ \alpha \equiv 3x - y + 2z - 4 = 0.$$

Los puntos B y C determinan el vector:

$$\overrightarrow{CB} = [B - C] = [(1,-1,0) - (0,-2,1)] = (1,1,-1).$$

El haz de planos β perpendiculares a la recta que pasa por B y C tiene la siguiente expresión general: $\beta \equiv x + y - z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano γ que contiene al punto $A(1,1,1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r}\beta \equiv x + y - z + D = 0 \\ A(1, 1, 1)\end{array}\right\} \Rightarrow 1 + 1 - 1 + D = 0;\;\; 1 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \gamma \equiv x + y - z - 1 = 0.$

La recta r pedida es la que forman los planos α y γ al cortarse:

$$\underline{r \equiv \begin{cases} 3x - y + 2z - 4 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}}.$$

Otra forma de expresión de r es, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - y + 2z - 4 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \lambda;\;\; \left.\begin{array}{r} -y + 2z = 4 - 3\lambda \\ y - z = 1 - \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow z = 5 - 4\lambda;$$

$y = z + 1 - \lambda = 5 - 4\lambda + 1 - \lambda = 6 - 5\lambda.$

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 6 - 5\lambda \\ z = 5 - 4\lambda \end{cases}}.$$

****

3º) Dada la función $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$, se pide:

$a)$ Calcular $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

$b)$ Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de la función.

$a)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x \cdot e^{-x^2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x \cdot e^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\underline{\lim_{x \to +\infty} \left(x \cdot e^{-x^2}\right) = 0.}$$

$b)$

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x^2} + x \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2} = e^{-x^2}(1 - 2x^2).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-x^2}(1 - 2x^2) = 0;\ \ 1 - 2x^2 = 0;\ \ 2x^2 = 1;\ \ x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Teniendo en cuenta que $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$ es continua en R por estar compuesta por el producto de dos funciones continuas, las raíces de su primera derivada dividen su dominio en los intervalos $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ donde su valor es, alternativamente, positivo y negativo. Considerando, por ejemplo, el valor $x = 0$ es $f'(0) = e^0(1 - 0) = 1 > 0$.

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).}$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right).}$$

De la continuidad de la función y de los periodos de crecimiento se deducen los extremos relativos así como si son máximo o mínimos; no obstante se determinan a través de la segunda derivada.

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo es que se anule su primera derivada. Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: según que sea negativa o positiva para los valores que anulan la primera derivada se trata de un máximo o de un mínimo, respectivamente.

$$f''(x) = -2x \cdot e^{-x^2} \cdot (1-2x^2) + e^{-x^2}(-4x) = -2x \cdot e^{-x^2}(1-2x^2+2) =$$

$$= -2x \cdot e^{-x^2} \cdot (3-2x^2).$$

$$f''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}} \cdot (3-1) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{e}} > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}} = -\frac{\sqrt{2e}}{2e} \ \Rightarrow \ \underline{Mínimo: P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2e}}{2e}\right)}.$$

Teniendo en cuenta que $f(x)$ es simétrica con respecto al origen por cumplirse que $f(-x) = -f(x)$:

$$\underline{Máximo: Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2e}}{2e}\right)}.$$

****

4º) Calcule la siguiente integral indefinida: $I = \int \frac{L(1+x^2)}{x^2} \cdot dx$.

$$I = \int \frac{L(1+x^2)}{x^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = L(1+x^2) \rightarrow du = \frac{2x}{1+x^2} \cdot dx \\ dv = \frac{1}{x^2} \cdot dx \rightarrow v = -\frac{1}{x} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

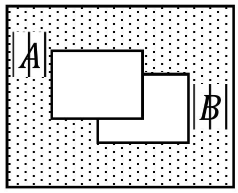
$$\Rightarrow L(1+x^2) \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) - \int -\frac{1}{x} \cdot \frac{2x}{1+x^2} \cdot dx = -\frac{1+x^2}{x} + 2 \cdot \int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx =$$

$$= -\frac{1+x^2}{x} + 2 \cdot arc\ tag\ x + C.$$

$$\underline{I = \int \frac{L(1+x^2)}{x^2} \cdot dx = -\frac{1+x^2}{x} + 2 \cdot arc\ tag\ x + C.}$$

****

5º) Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que: $P(A) = \frac{3}{5}, P(B) = \frac{7}{10}, P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{10}$. Calcule: $P(A \cup B), P(A \cap B)\ y\ P(\overline{B}/A)$. (Donde, si C y D son sucesos $\overline{C}$ denota el suceso complementario de C y $P(C/D)$ denota la probabilidad del suceso C condicionada al suceso D).



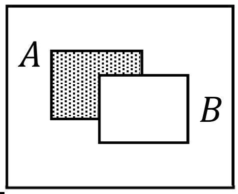
$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B).$$

$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - \frac{1}{10} = \underline{\frac{9}{10} = 0,9}.$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{3}{5} + \frac{7}{10} - \frac{9}{10} = \frac{3}{5} - \frac{2}{10} = \frac{6-2}{10} =$$

$$= \frac{4}{10} = \underline{\frac{2}{5} = 0,4}.$$



$\overline{B} \cap A = A - (A \cap B)$

$$P(\overline{B}/A) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{5} - \frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \underline{\frac{1}{5} = 0,2}.$$

****