PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

JUNIO – 2019

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas. No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas.

OPCIÓN A

1º) Considere el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=a \\ ax+y+z=a+3 \end{cases}$ en función del parámetro a:

a) Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para $a=0$.

b) Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & a+3 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}=a+a+a-a^3-1-1=-a^3+3a-2=0;$$

$a^3-3a+2=0.$

Resolviendo por Ruffini:

Las raíces distintas son $m_1 = 1, m_2 = -2$.

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	$\boxed{0}$
1		1	2	
	1	2	$\boxed{0}$	
-2		-2		
	1	$\boxed{0}$		

$$\underline{Para \begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq -2 \end{cases} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

Para $a = 0$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ x + z = 0 \\ y + z = 3 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{3-1}{-2} = \frac{2}{-2} = -1. \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3-1}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1-3}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1. \qquad \underline{Solución: x = -1,\ y = 2,\ z = 1.}$$

$b)$

$$a = -2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 + F_2 = -F_3\} \Rightarrow Rang\ M = 2.$$

$$\underline{Para\ a = -2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

El sistema resulta $\left.\begin{array}{r} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = 1 \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado; despreciando una de las ecuaciones, por ejemplo la primera, y haciendo $y = \lambda$:

$$\left.\begin{array}{r} x + z = -2 + 2\lambda \\ -2x + z = 1 - \lambda \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + z = -2 + 2\lambda \\ 2x - z = -1 + \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 3x = -3 + 3\lambda \Rightarrow x = -1 + \lambda;$$

$$(-1 + \lambda) + z = -2 + 2\lambda \Rightarrow z = -1 + \lambda.$$

$$\underline{Solución: x = -1 + \lambda,\ y = \lambda,\ z = -1 + \lambda,\ \forall \lambda \in R.}$$

$c)$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M = 1;\ \ Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = 1;\ Rang\ M' = 2 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

****

2º) a) Calcule la integral indefinida $I = \int x^2 \cdot \cos x \cdot dx$.

b) Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x = 0$ y $x = \pi$, y la gráfica de la función $f(x) = x^2 \cdot \cos x$.

----

a)

$$A = \int x^2 \cdot cos\ x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = x^2 \rightarrow du = 2x \cdot dx \\ cos\ x \cdot dx = dv \rightarrow v = sen\ x \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = x^2 \cdot sen\ x - \int sen\ x \cdot 2x \cdot\ dx = x^2 \cdot \operatorname{sen} x - 2 \int x \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx =$$

$$= x^2 \cdot \operatorname{sen} x - 2B = A. \quad (*)$$

$$B = \int x \cdot sen\ x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = x \rightarrow du = dx \\ sen\ x \cdot dx = dv \rightarrow v = -cos\ x \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = -x \cdot cos\ x + \int cos\ x \cdot dx = -x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x.$$

Sustituyendo en (*) el valor de B:

$$A = x^2 \operatorname{sen} x + 2\,(x \cdot \cos x - \operatorname{sen}\ x) + C =$$

$$= x^2 \operatorname{sen}\ x + 2\,x \cdot cos\ x - 2 \operatorname{sen}\ x + C = (x^2 - 2) \cdot \operatorname{sen}\ x + 2x \cdot cos\ x + C.$$

$$\underline{I = \int x^2 \cdot \cos x \cdot dx = (x^2 - 2) \cdot \operatorname{sen}\ x + 2x \cdot cos\ x + C.}$$

b)

La función $f(x) = x^2 \cdot \cos x$ es continua en su dominio, que es R, por ser el producto de dos funciones continuas en R, por lo cual es continua en cualquier intervalo finito que se considere.

$$f(0) = 0. \quad f(\pi) = \pi^2 \cdot \cos \pi = \pi^2 \cdot (-1) = -\pi^2.$$

Según el teorema de Bolzano, la función $f(x)$ tiene al menos una raíz en el intervalo $(0, \pi)$. La raíz, que es única, es la siguiente:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 \cdot \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \notin (0, 1) \\ x_2 = \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$ La raíz única es $x = \frac{\pi}{2}$.

De lo anterior se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot cos\ x \cdot dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2 \cdot cos\ x \cdot dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot cos\ x \cdot dx + \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot cos\ x \cdot dx =$$

$$= [(x^2 - 2) \cdot \text{sen } x + 2x \cdot cos\, x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [(x^2 - 2) \cdot \text{sen } x + 2x \cdot cos\, x]_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left[\left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right) \cdot \text{sen } \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot cos\, \frac{\pi}{2}\right] - [(0 - 2) \cdot \text{sen } 0 + 2 \cdot 0 \cdot cos\, 0] +$$

$$+ \left[\left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right) \cdot \text{sen } \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot cos\, \frac{\pi}{2}\right] - [(\pi^2 - 2) \cdot \text{sen } \pi + 2 \cdot \pi \cdot cos\, \pi] =$$

$$= 2 \cdot \left[\left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right) \cdot 1 + \pi \cdot 0\right] - 0 - [(\pi^2 - 2) \cdot 0 - 2\pi] = \frac{\pi^2}{2} - 4 + 2\pi = \frac{\pi^2 + 4\pi - 4}{2}.$$

$$\underline{S = \frac{\pi^2 + 4\pi - 4}{2}\ u^2 \cong 18{,}44\ u^2.}$$

****

3º) Los puntos $A(3,0,0), B(0,3,0)$ y $C(0,0,3)$ son tres de los vértices de un tetraedro. El cuarto vértice D está contenido en la recta r que pasa por el punto $P(1,1,1)$ y es perpendicular al plano π que contiene a loa puntos A, B y C.

a) Calcule la ecuación del plano π que contiene a los puntos A, B y C.

b) Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto $P(1,1,1)$ y es perpendicular al plano π.

c) Calcule las coordenadas del vértice D sabiendo que el volumen del tetraedro el 18.

Los puntos $A(3,0,0), B(0,3,0)$ y $C(0,0,3)$ determinan los vectores:

$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(0,3,0) - (3,0,0)] = (-3,3,0).$

$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(0,0,3) - (3,0,0)] = (-3,0,3).$

La expresión general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0;\ \ 9(x-3) + 9z + 9y = 0;$$

$x - 3 + z + y = 0.$

$$\underline{\pi \equiv x + y + z - 3 = 0.}$$

b)

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (1,1,1).$

La recta pedida r que pasa por el punto $P(1,1,1)$, por ser perpendicular a π, tiene como vector director al vector normal del plano: $\overrightarrow{v_r} = (1,1,1).$

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \underline{\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}}.$

c)

El vértice pedido, por pertenecer a r, es de la forma $D(1+\lambda, 1+\lambda, 1+\lambda).$

$\overrightarrow{AD} = [D - A] = [(1+\lambda, 1+\lambda, 1+\lambda) - (3,0,0)] = (-2+\lambda, 1+\lambda, 1+\lambda).$

El volumen de un tetraedro de vértices A, B, C y D viene dado por la siguiente expresión: $V = \frac{1}{6} \cdot \left| det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) \right|.$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right| = 18; \quad \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{matrix} -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -2+\lambda & 1+\lambda & 1+\lambda \end{matrix} \right\| = 18;$$

$$\left\| \begin{matrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2+\lambda & 1+\lambda & 1+\lambda \end{matrix} \right\| = \frac{6 \cdot 18}{9} = 12;$$

$(-2+\lambda) + (1+\lambda) + (1+\lambda) = 12; \quad 3\lambda = 12 \Rightarrow \lambda = 4.$

$\underline{El\ v\acute{e}rtice\ pedido\ es\ D(5, 5, 5).}$

****

4º) (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al 4º decimal).

El tiempo de duración de las bombillas de una cierta marca, medido en horas, sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ. Se sabe que el 69,50 % de las bombillas duran menos de 5.061,2 horas, y que el 16,60 % de las bombillas duran más de 5.116,4 horas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una bombilla de esa marca dure entre 5.061,2 y 5.116,4 horas?

b) Calcule la media y la desviación típica de esta distribución normal.

Datos: $P(X < 5.061{,}2) = 0{,}6950;\ \ P(X > 5.116{,}4) = 0{,}1660\ \Rightarrow$

$\Rightarrow P(X > 5.116{,}4) = 1 - P(X < 5.116{,}4).$

a)

$P(5.061{,}2 < X < 5.116{,}4) = P(X < 5.116{,}4) - P(X < 5.061{,}2) =$

$= 0{,}8340 - 0{,}6950 = \underline{0{,}1390}.$

b)

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$.

$$P\left(Z < \frac{5.061{,}2-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}6950 \Rightarrow Tabla\ N(0,1)\ inversa \Rightarrow \frac{5.061{,}2-\mu}{\sigma} = 0{,}51.$$

$$P\left(Z < \frac{5.116{,}4-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}8340 \Rightarrow Tabla\ N(0,1)\ inversa \Rightarrow \frac{5.116{,}4-\mu}{\sigma} = 0{,}97.$$

Resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 5.061{,}2 - \mu = 0{,}51\sigma \\ 5.116{,}4 - \mu = 0{,}97\sigma \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \mu = 5.061{,}2 - 0{,}51\sigma \\ \rightarrow \mu = 5.116{,}4 - 0{,}97\sigma \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l} a \\ b \end{array}}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 5.061{,}2 - 0{,}51\sigma = 5.116{,}4 - 0{,}97\sigma;\ \ 0{,}46\sigma = 55{,}2;\ \ \sigma = \frac{52{,}2}{0{,}46} = 120.$

$$\mu = 5.061{,}2 - 0{,}51\sigma = 5.061{,}2 - 0{,}51 \cdot 120 = 5.061{,}2 - 61{,}2 = 5.000.$$

$$\underline{Media\colon \mu = 5.000;\ desviación\ típica\colon \sigma = 120}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Considere la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Calcule las potencias sucesivas $A^2, A^3\ y\ A^4$.

b) Calcule la expresión general A^n para cualquier valor de $n\in N$.

c) Determine si existe la inversa de A. En caso afirmativo, calcúlela.

----

a)

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}.$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}.$$

$$A^4=A^3\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}1 & 4 & 4\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}.$$

b)

Del apartado anterior se deduce que: $\underline{A^n=\begin{pmatrix}1 & n & n\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \forall n\in N.}$

c)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0\Rightarrow \text{La matriz A es invertible.}$$

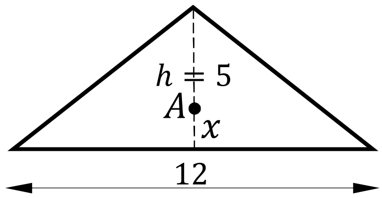
Se obtiene la inversa por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_1\to F_1-F_2\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{F_1\to F_1-F_3\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow \underline{A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}.$$

****

2º) Considere un triángulo isósceles cuya base de 12 cm es el lado desigual y cuya altura es de 5 cm. Se quiere determinar un punto A situado sobre la altura a una distancia x de la base de manera que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo sea mínima. Observe la figura:



a) Demuestre que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo viene dada por la expresión $f(x) = 5 - x + 2\sqrt{x^2 + 36}$.

b) Calcule el valor de x para que la suma de las distancias sea mínima.

c) Calcule dicha distancia mínima.

----

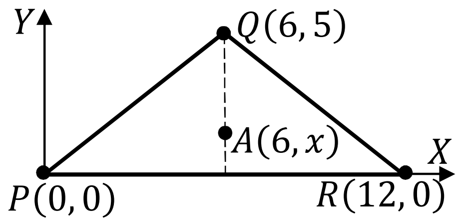
a)

Situando el triángulo como indica la figura, las coordenadas de los vértices, así como el punto A, son los indicados en la figura adjunta.

$$\overline{PA} = \sqrt{(6-0)^2 + (x-0)^2} = \sqrt{36 + x^2}.$$

$$\overline{QA} = \sqrt{(6-6)^2 + (5-x)^2} = 5 - x.$$

$$\overline{RA} = \sqrt{(6-12)^2 + (x-0)^2} = \sqrt{36 + x^2}.$$



$$\overline{PA} + \overline{QA} + \overline{RA} = \sqrt{36 + x^2} + 5 - x + \sqrt{36 + x^2} = 5 - x + 2\sqrt{36 + x^2}.$$

$$\underline{Queda\ demostrado\ que\ \overline{PA} + \overline{QA} + \overline{RA} = 5 - x + 2\sqrt{36 + x^2}}.$$

b)

Se considera la función $f(x) = 5 - x + 2\sqrt{36 + x^2}$.

Una función tiene un mínimo relativo cuando se anula su primera derivada y resulta positivo el valor de su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$f'(x) = -1 + 2 \cdot \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{36+x^2}} = -1 + \frac{2x}{\sqrt{36+x^2}}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -1 + \frac{2x}{\sqrt{36+x^2}} = 0;\ \ \frac{2x}{\sqrt{36+x^2}} = 1;\ \ \frac{4x^2}{36+x^2} = 1;\ \ 4x^2 = 36 + x^2;$$

$$3x^2 = 36;\ \ x^2 = 12 \Rightarrow x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3} \Rightarrow x_1 = -2\sqrt{3}, x_2 = 2\sqrt{3}.$$

$$f''(x) = \frac{2 \cdot \sqrt{36+x^2} - 2x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{36+x^2}}}{36+x^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{36+x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{36+x^2}}}{36+x^2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{36+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{36+x^2}}}{36+x^2} =$$

$$= 2 \cdot \frac{36+x^2-x^2}{(36+x^2)\cdot\sqrt{36+x^2}} = 2 \cdot \frac{36}{(36+x^2)\cdot\sqrt{36+x^2}} = \frac{72\cdot\sqrt{36+x^2}}{(36+x^2)^2} = f''(x).$$

Por ser $f''(x) = f''(-x)$ es $f''(x) > 0, \forall x \in R \Rightarrow Mínimo\ para\ x_1\ y\ x_2.$

A pesar de la justificación de mínimo, la solución negativa carece de sentido lógico.

$$\underline{La\ distancia\ es\ mínima\ para\ x = 2\sqrt{3}.}$$

$c)$

$$d_{mínima} = \overline{PA} + \overline{QA} + \overline{RA} = 5 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{36+12} = 5 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{48} =$$

$$= 5 - 2\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = 5 + 6\sqrt{3}.$$

$$\underline{d_{mínima} = \left(5 + 6\sqrt{3}\right)\ unidades.}$$

****

3º) Considere las rectas $r \equiv \frac{x-5}{1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+1}{1}$ y $s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$.

a) Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) En caso de que las rectas se corten, calcule el plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcule la perpendicular común a ambas rectas.

----

a)

Un punto y un vector director de la recta r son $A(5, 6, -1)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1, 1, 1)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(1, 0, -1)$ y $\overrightarrow{v_s} = (1, 1, -1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = [B - A] = [(1, 0, -1) - (5, 6, -1)] = (-4, -6, 0)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 4 - 6 + 4 - 6 = 8 - 12 = -4 \neq 0 \Rightarrow$$

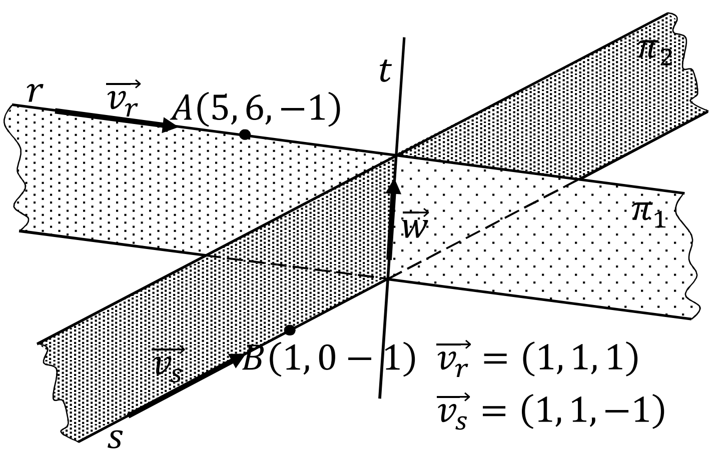
$$\Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} = 3 \ \Rightarrow \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\ no\ son\ coplanarios.$$

$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan.}$$

b)

Primer procedimiento.

Es esquema adjunto sirve de ilustración a cuanto se hace a continuación.



Un vector $\vec{w}$ perpendicular a los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de estos vectores:

$$\overrightarrow{w'} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -i + j + k - k - i + j = -2i + 2j \Rightarrow$$

$\Rightarrow \vec{w} = (1, -1, 0).$

Determinamos dos planos π_1 y π_2 de las siguientes características:

$$\pi_1(A;\ \overrightarrow{v_r}, \vec{w}) \equiv \begin{vmatrix} x-5 & y-6 & z+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$(y-6) - (z+1) - (z+1) + (x-5) = 0;\ \ (x-5) + (y-6) - 2(z+1) = 0;$

$x - 5 + y - 6 - 2z - 2 = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv x + y - 2z - 13 = 0.$

$$\pi_2(B;\ \overrightarrow{v_s}, \vec{w}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$-y - (z+1) - (z+1) - (x-1) = 0;\ \ -(x-1) - y - 2(z+1) = 0;$

$x - 1 + y + 2z + 2 = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv x + y + 2z + 1 = 0.$

La recta pedida t es la intersección de los planos π_1 y π_2:

$$\underline{t \equiv \begin{cases} x + y - 2z - 13 = 0 \\ x + y + 2z + 1 = 0 \end{cases}}.$$

Segundo procedimiento:

Las ecuaciones paramétricas de las rectas tienen las siguientes expresiones:

$r \equiv \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 6 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = \mu \\ z = -1 - \mu \end{cases}$. Un punto genérico de cada una de las rectas son los siguientes:

$P \in r \Rightarrow P(5 + \lambda, 6 + \lambda, -1 + \lambda);\ \ Q \in s \Rightarrow Q(1 + \mu, \mu, -1 - \mu).$

$\overrightarrow{QP} = [P - Q] = (4 + \lambda - \mu, 6 + \lambda - \mu, \lambda + \mu).$

El vector $\overrightarrow{QP}$ tiene que ser perpendicular a los vectores directores de las rectas, por lo cual, sus productos escalares tienen que valer ambos cero:

$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \Rightarrow (4 + \lambda - \mu, 6 + \lambda - \mu, \lambda + \mu) \cdot (1, 1, 1) = 0;$

$4+\lambda-\mu+6+\lambda-\mu+\lambda+\mu=3\lambda-\mu+10=0;\ \ 3\lambda-\mu=-10. \quad (1)$

$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{v_s}=0 \Rightarrow (4+\lambda-\mu, 6+\lambda-\mu, \lambda+\mu)\cdot(1,1,-1)=0;$

$4+\lambda-\mu+6+\lambda-\mu-\lambda-\mu=0;\ \ \lambda-3\mu+10=0;\ \ \lambda-3\mu=-10. \quad (2)$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{l} 3\lambda-\mu=-10 \\ \lambda-3\mu=-10 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 9\lambda-3\mu=-30 \\ -\lambda+3\mu=10 \end{array}\right\} \Rightarrow 8\lambda=-20 \Rightarrow \lambda=-\frac{20}{8}=-\frac{5}{2}.$$

$-\frac{15}{2}-\mu=-10;\ \ 15+2\mu=20 \Rightarrow 2\mu=5 \Rightarrow \mu=\frac{5}{2}.$

$\overrightarrow{QP}=\left(4-\frac{5}{2}-\frac{5}{2}, 6-\frac{5}{2}-\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\right)=(-1,1,0).$

Un vector director de la perpendicular común t es cualquier vector que sea linealmente dependiente de $\overrightarrow{QP}$, por ejemplo el mismo: $\overrightarrow{v_t}=(-1,1,0)$.

Un punto de la recta t es $P\left(5-\frac{5}{2}, 6-\frac{5}{2}, -1-\frac{5}{2}\right) \Rightarrow P\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{7}{2}\right)$.

La expresión de t por unas ecuaciones paramétricas es $\underline{t \equiv \begin{cases} x=\frac{5}{2}-\beta \\ y=\frac{7}{2}+\beta \\ z=-\frac{7}{2} \end{cases}}.$

****

4º) (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al 4º decimal).

La probabilidad de que un determinado equipo de fútbol gane cuando juega en casa es $\frac{2}{3}$, y la probabilidad de que gane cuando juega fuera es $\frac{2}{5}$.

a) Sin saber dónde jugará el próximo partido, calcule la probabilidad de que gane.

b) Si ganó el último partido del campeonato, ¿cuál es la probabilidad de que jugara en casa?

Datos: $P(C \cap G) = \frac{2}{3}$; $P(C \cap P) = \frac{1}{3}$; $P(F \cap G) = \frac{2}{5}$; $P(F \cap P) = \frac{3}{5}$.

Se entiende que el equipo juega la mitad de los partidos en casa y la mitad fuera.

a)

$$P(G) = P(C) \cdot P(G/C) + P(F) \cdot P(G/F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \underline{\frac{8}{15} = 0{,}5333}.$$

b)

$$P = P(C/G) = \frac{P(C) \cdot P(G/C)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{8}{15}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{8}{15}} = \frac{15}{24} = \underline{\frac{5}{8} = 0{,}6250}.$$

****