PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

EXTRAORDINARIA – 2021

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1º) Considere el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+ay-z=0 \\ 2x+y+az=0 \\ x+5y-az=a+1 \end{cases}$ en función del parámetro a.

a) Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única.

b) Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & 5 & -a \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 0 \\ 2 & 1 & a & 0 \\ 1 & 5 & -a & a+1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & 5 & -a \end{vmatrix}=-a-10+a^2+1-5a+2a^2=0;\ \ 3a^2-6a-9=0;$$

$$a^2-2a-3=0;\ \ a=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2\pm4}{2}=1\pm2\Rightarrow a_1=-1, a_2=3.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a\neq-1 \\ a\neq3 \end{Bmatrix}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg.\Rightarrow S.C.D.}$$

$b)$

$$Para\ a=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 5 & 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a=-1 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Para $a=-1$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r}x-y-z=0\\ 2x+y-z=0\\ x+5y+z=0\end{array}\right\}$, que es homogéneo y también compatible indeterminado. Para su resolución se desprecia una ecuación, por ejemplo, la tercer, y se parametriza, por ejemplo, $z=\lambda$;

$$\left.\begin{array}{r}x-y=\lambda\\ 2x+y=\lambda\end{array}\right\} \Rightarrow 3x=2\lambda;\ \ x=\frac{2}{3}\lambda.\ \ y=x-\lambda=\frac{2}{3}\lambda-\lambda=-\frac{1}{3}\lambda.$$

$$\underline{Solución: x=\frac{2}{3}\lambda;\ \ y=-\frac{1}{3}\lambda;\ \ z=\lambda, \forall\lambda \in R.}$$

$c)$

$$Para\ a=3 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 3 & 0\\ 1 & 5 & -3 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 5 & 4\end{vmatrix}=4-24 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ a=3 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

****

2º) Considere la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Si se denota por $tr(A)$ la traza de la matriz A (es decir, la suma de los elementos de su diagonal principal) y por $|A|$ el determinante de A, compruebe que, para cualquier valor de a, se cumple la ecuación $A^2=tr(A)\cdot A-|A|\cdot I$, donde I denota la matriz identidad de orden 2.

b) Determine para qué valores de a la matriz A es regular (o inversible).

c) Para $a=-3$, resuelva la ecuación matricial $AX-A^t=A$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

----

a)

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 4-a & 4a \\ -4 & 4-a \end{pmatrix}}.$$

$$(A)\cdot A-|A|\cdot I=(2+2)\cdot\begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{vmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 8 & 4a \\ -4 & 8 \end{pmatrix}-(4+a)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 4a \\ -4 & 8 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4+a & 0 \\ 0 & 4+a \end{pmatrix}=$$

$$=\underline{\begin{pmatrix} 4-a & 4a \\ -4 & 4-a \end{pmatrix}}.$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ \forall a\in R\ es\ A^2=tr(A)\cdot A-|A|\cdot I.}$$

b)

Una matriz es regular o invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=4+a=0\Rightarrow a=-4.$$

$$\underline{A\ es\ invertible\ \forall a\in R-\{-4\}}.$$

c)

$$AX-A^t=A;\ \ AX=A+A^t;\ \ A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot(A+A^t);$$

$$I\cdot X=A^{-1}\cdot(A+A^t)\Rightarrow \underline{X=A^{-1}\cdot(A+A^t)}.$$

$$Para\ a=-3\Rightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};\ \ A^t=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix};\ \ A+A^t=\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=4-3=1.\ \ Adj.de\ A^t=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot (A + A^t) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{X = 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

****

3º) Dada la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ definida para todo valor real de $x \in R$, se pide:

a) Calcule sus extremos relativos (máximos y mínimos) y determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcule $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R por ser producto de dos funciones continuas en R.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x} = x \cdot e^{-x} \cdot (2 - x).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x \cdot e^{-x} \cdot (2 - x) = 0; \;\; e^{-x} \neq 0, \forall x \in R \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2.$$

Por ser $f(x)$ continua en R, las raíces de la derivada dividen a la recta real en los intervalos $(-\infty, 0), (0, 2)\ y\ (2, +\infty)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 1 \in (0, 2)$ es:

$$f'(1) = 1 \cdot e^{-1} \cdot (2 - 1) = \frac{1}{e} > 0 \Rightarrow Creciente.$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in (0, 2)}.$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f'(x) = x \cdot e^{-x} \cdot (2 - x) = e^{-x} \cdot (2x - x^2).$$

$$f''(x) = -e^{-x} \cdot (2x - x^2) + e^{-x} \cdot (2 - 2x) = e^{-x} \cdot (-2x + x^2 + 2 - 2x) =$$

$$= e^{-x} \cdot (x^2 - 4x + 2).$$

$$f''(0) = e^{-0} \cdot (0^2 - 4 \cdot 0 + 2) = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = 0^2 \cdot e^{-0} = 0 \Rightarrow \underline{Mín.\ O(0,0)}.$$

$$f''(2) = e^{-2} \cdot (2^2 - 4 \cdot 2 + 2) = \frac{-2}{e^2} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 2.$$

$$f(2) = 2^2 \cdot e^{-2} = \frac{4}{e^2} \Rightarrow \underline{Máx.\ A\left(2, \frac{4}{e^2}\right)}.$$

$b)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2 \cdot e^{-x}) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{(-\infty)^2}{e^{-\infty}} = \frac{\infty}{0} = \infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2 \cdot e^{-x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty^2}{e^\infty} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{2\cdot\infty}{e^\infty} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{e^\infty} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

$$\underline{\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \text{ y } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

****

4º) a) Calcule la integral indefinida $I = \int x \cdot sen\ (x^2) \cdot dx$ utilizando el método de cambio de variable (o método de sustitución).

b) Determine el menor valor de $a > 0$ para el cual se cumple $\int_0^a x \cdot sen^2 x \cdot dx = 1$.

----

a)

$$I = \int x \cdot sen\ (x^2) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x^2 = t \\ x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot dt \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \int sen\ t \cdot dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \cos t + C \Rightarrow \underline{I = \int x \cdot sen\ (x^2) \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot \cos\ (x^2) + C}.$$

b)

$$\int_0^a x sen^2 x \cdot dx = 1 \Rightarrow \left[-\frac{1}{2} \cos\ (x^2) \right]_0^a = 1;\ \ -\frac{1}{2} \cdot \cos\ (a^2) + \frac{1}{2} \cdot \cos 0 = 1;$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \cos\ (a^2) + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1;\ -\cos\ (a^2) + 1 = 2;\ \ \cos\ (a^2) = -1 \Rightarrow a^2 = k\pi \Rightarrow$$

$\Rightarrow a = \pm\sqrt{k\pi}, k \in N.$ Por ser a el menor valor tal que $a > 0 \Rightarrow k = 1$.

$$\underline{a = +\sqrt{\pi}}.$$

****

5º) Considere las rectas $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ y $s \equiv \begin{cases} x - 2y = -1 \\ y + z = 1 \end{cases}$.

a) Compruebe que las rectas se cortan en un punto y calcule su punto de corte.

b) Determine el ángulo que forman las dos rectas.

c) Calcule la ecuación del plano π que contiene a las dos rectas.

----

a)

Las expresiones de las dos rectas dadas por unas ecuaciones paramétricas son las siguientes:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}.$$

$$s \equiv \begin{cases} x - 2y = -1 \\ y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow y = \mu \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\mu \\ y = \mu \\ z = 1 - \mu \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de la recta r son $A(1, 0, 1)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1, 1, -1)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(-1, 0, 1)$ y $\overrightarrow{v_s} = (2, 1, -1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\overrightarrow{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(-1, 0, 1) - (1, 0, 1)] = (-2, 0, 0)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0 \Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\} < 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\ son\ coplanarios.$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cortan\ en\ un\ punto.}$$

Si las rectas se cortan en un punto tiene que cumplirse: $\left.\begin{array}{r} 1+\lambda=-1+2\mu \\ \lambda=\mu \\ 1-\lambda=1-\mu \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda=\mu=2.$ El punto de corte es: $\left\{\begin{array}{l} x=1+2=3 \\ y=2 \\ z=1-2=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \underline{P(3,2,-1)}.$

$b)$

El ángulo que forman dos rectas es el que forman sus vectores directores.

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}=|\overrightarrow{v_r}| \cdot |\overrightarrow{v_s}| \cdot \cos\beta \Rightarrow \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}|}{|\overrightarrow{v_r}| \cdot |\overrightarrow{v_s}|}=\frac{|(1,1,-1)\cdot(2,1,-1)|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2} \cdot \sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=$$

$$=\frac{|2+1+1|}{\sqrt{1+1+1} \cdot \sqrt{4+1+1}}=\frac{|4|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}}=\frac{4}{\sqrt{18}}=0{,}9428 \Rightarrow \underline{\beta=19^\circ\ 28'\ 16''}.$$

$c)$

$$\pi(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s};\ A) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0;$$

$$-(x-1)-2y+(z-1)-2(z-1)+(x-1)+y=0;\ \ -y-(z-1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\pi \equiv y+z-1=0}$$

****

6º) Los puntos $A(2,0,0)$ y $B(-1,12,4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice, C, se encuentra en la recta $r \equiv \begin{cases} 4x+3z=33 \\ y=0 \end{cases}$.

a) Calcule las coordenadas del tercer vértice C sabiendo que la recta r es perpendicular a la recta que pasa por A y C.

b) Determine si el triángulo $\widehat{ABC}$ tiene un ángulo recto en A y calcule su área.

----

a)

Los puntos $A(2,0,0)$ y $B(-1,12,4)$ determinan el vector:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(-1,12,4) - (2,0,0)] = (-3,12,4)$.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 4x+3z=33 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow x = 3\mu;\ \ 12\mu + 3z = 33 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3\mu \\ y = 0 \\ z = 11 - 4\mu \end{cases}.$$

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (3,0,-4)$ y el punto C tiene como expresión general, dependiendo del parámetro μ: $C(3\mu, 0, 11-4\mu)$.

Por definición, tiene que cumplirse que: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(3\mu,0,11-4\mu) - (2,0,0)] = (3\mu-2, 0, 11-4\mu)$.

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \Rightarrow (3\mu-2,0,11-4\mu) \cdot (3,0,-4) = 0;\ 9\mu - 6 - 44 + 16\mu = 0;$

$25\mu = 50;\ \ \mu = 2 \Rightarrow \underline{C(6,0,3)}$.

b)

Del apartado anterior: $\overrightarrow{AC} = (4,0,3)$.

El triángulo $\widehat{ABC}$ es rectángulo en A cuando $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$:

$(-3,12,4) \cdot (4,0,3) = -12 + 12 = 0 \Rightarrow \underline{El\ triángulo\ es\ rectángulo\ en\ A}$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 12^2 + 4^2} \cdot \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{9+144+16} \cdot \sqrt{16+9} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{169} \cdot \sqrt{25} = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 5 = \underline{\frac{65}{2}\ u^2 = 32{,}5\ u^2}$.

****

7º) Una urna contiene cinco bolas negras numeradas del 1 al 5, y siete bolas blancas, numeradas del 1 al 7. Se saca de la urna una bola al azar. Calcule:

a) La probabilidad de que la bola sea blanca.

b) La probabilidad de que la bola esté numerada con un número par.

c) La probabilidad de que la bola esté numerada con un número par, sabiendo que es blanca.

d) La probabilidad de que la bola sea blanca y esté numerada con número par.

e) La probabilidad de que la bola sea blanca, sabiendo que está numerada con un número par.

Para la resolución de este ejercicio se tiene en cuenta la regla de Laplace.

a)

$$P = \underline{\frac{7}{12} = 0{,}5833.}$$

b)

$$P = \underline{\frac{5}{12} = 0{,}4167.}$$

c)

$$P = P(par/b) = \frac{P(par \cap b)}{P(b)} = \frac{\frac{3}{12}}{\frac{7}{12}} = \underline{\frac{3}{7} = 0{,}4286.}$$

d)

$$P = \underline{\frac{3}{12} = 0{,}25}$$

e)

$$P = P(b/par) = \frac{P(b \cap par)}{P(par)} = \frac{\frac{3}{12}}{\frac{5}{12}} = \underline{\frac{3}{5} = 0{,}6.}$$

****

8º) Juan es un estudiante bastante despistado y su tutora está cansada de que llegue tarde a clase. Él se defiende diciendo que no es para tanto y que la tutora le tiene manía. Ella le propone el siguiente trato: si en los próximos 9 días Juan llega tarde como mucho 2 días, la tutora le sube 1 punto en la nota final de la evaluación. Sabiendo que la probabilidad de que Juan llegue tarde a clase cada día es 0,45, determine:

a) El tipo de distribución que sigue la variable aleatoria que cuenta el número de días que Juan llega tarde a clase en los próximos 9 días. ¿Cuáles son sus parámetros?

b) ¿Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución?

c)¿Cuál es la probabilidad de que Juan consiga la ansiada subida de 1 punto en la nota final?

----

a)

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$$\underline{p = 0{,}45;\ \ q = 1 - p = 0{,}55;\ \ n = 9}$$

b)

$$\mu = n \cdot p = 9 \cdot 0{,}45 \Rightarrow \underline{\mu = 40{,}5}.$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{9 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}55} \Rightarrow \underline{\sigma = \sqrt{2{,}2275} \cong 1{,}49}.$$

c)

$$P = P(0) + P(1) + P(2) =$$

$$= \binom{9}{0} \cdot 0{,}45^0 \cdot 0{,}55^9 + \binom{9}{1} \cdot 0{,}45^1 \cdot 0{,}55^8 + \binom{9}{2} \cdot 0{,}45^2 \cdot 0{,}55^7 =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 0{,}0046 + 9 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}0084 + \frac{9\,!}{7\,! \cdot 2\,!} \cdot 0{,}2025 \cdot 0{,}0152 =$$

$$= 0{,}0046 + 0.0339 + 36 \cdot 0{,}0031 = 0{,}0046 + 0.0339 + 0{,}1110 = 0{,}1495.$$

$$\underline{Juan\ tiene\ el\ 14{,}95\ \%\ de\ posibilidades\ de\ subir\ un\ punto\ la\ nota\ final.}$$

****