PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JULIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta sólo una de las dos opciones propuestas (OCIÓN A/OPCIÓN B).

OPCIÓN A

Parte A1. Responde a cuatro de las cinco preguntas que se plantean a continuación.

1º) ¿Para qué valor o valores del parámetro m el sistema $\begin{cases} -2x+y=1 \\ (m-1)x+(m+2)y=2 \end{cases}$ es incompatible? Resolver el sistema para m = 0.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ m-1 & m+2 \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ m-1 & m+2 & 2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ m-1 & m+2 \end{vmatrix}=-2m-4-m+1=0;\ -3m-3=0 \Rightarrow m=-1.$$

$$Para\ m\neq -1\ \Rightarrow Rang\ A=Rang\ A'=2=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.$$

$$Para\ m=-1 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A'=2.$$

$$\underline{Para\ m=-1\ \Rightarrow Rang\ A=1;\ Rang\ A'=2 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

Para $m=0$ el sistema resulta $\begin{cases} -2x+y=1 \\ -x+2y=2 \end{cases}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{0}{-4+1}=\underline{0}. \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{-4+1}{-4+1}=\underline{1}.$$

****

2º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & x \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcular, para cualquier valor de x, la matriz $C = A^{-1} \cdot B$.

$b)$ ¿Existe algún valor de x para el que la matriz C es igual a su traspuesta?

$a)$

Se obtiene la inversa de A por el procedimiento de Gauss-Jordan:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 + F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_1 \to F_1 + 2F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$C = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+4 & 3+2x \\ x+2 & 1+x \end{pmatrix}.$$

$$\underline{C = \begin{pmatrix} 3x+4 & 3+2x \\ x+2 & 1+x \end{pmatrix}, \forall x \in R.}$$

$b)$

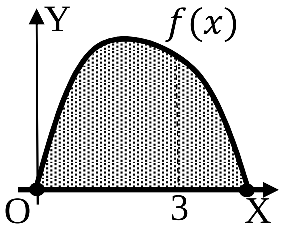
$$C = C^t \Rightarrow \begin{pmatrix} 3x+4 & 3+2x \\ x+2 & 1+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+4 & x+2 \\ 3+2x & 1+x \end{pmatrix} \Rightarrow 3 + 2x = x + 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = -1.$

$$\underline{C = C^t \ para \ x = -1.}$$

****

3º) Sea $f(x)=\begin{cases} 4x-x^2, & x\leq 3 \\ \frac{3}{2}(-x+5), & x>3 \end{cases}$. Calcular el área limitada por la función $f(x)$ y el eje OX. El área solicitada aparece sombreada en la figura adjunta.



El punto de corte de $f(x)$ con el eje X, además del origen, es el siguiente:

$\frac{3}{2}(-x+5)=0;\ -x+5=0;\ \ x=5\ \Rightarrow P(5,0).$

De la observación del gráfico dado se deduce el área a calcular, que es la siguiente:

$$S=\int_0^3(4x-x^2)\,dx+\int_3^5\frac{3}{2}\cdot(-x+5)\,dx=\left[\frac{4x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^3+\frac{3}{2}\cdot\left[\frac{-x^2}{2}+5x\right]_3^5=$$

$$=\left(2\cdot 3^2-\frac{3^2}{3}\right)-0+\frac{3}{2}\cdot\left[\left(-\frac{5^2}{2}+5\cdot 5\right)-\left(-\frac{3^2}{2}+5\cdot 3\right)\right]=$$

$$=18-9+\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{25}{2}+25+\frac{9}{2}-15\right)=9+\frac{3}{2}\cdot(-8+10)=9+3=12.$$

$$\underline{S=12\ u^2}.$$

****

4º) Se sabe que en las bodegas de vino de Rioja el número de días necesarios para el proceso de fermentación de la uva en la elaboración de vinos tintos sigue una distribución normal de media 17 días con una desviación típica de 7 días. Con una muestra de 25 bodegas, calcular la probabilidad de que el proceso de fermentación tenga una duración media de entre 15 y 18 días.

$$Para\ n = 25 \rightarrow \overline{X} = N\left(17, \frac{7}{\sqrt{25}}\right) = N\left(17, \frac{7}{5}\right) = N(17, 1'4).$$

Tipificando: $Z = \frac{\overline{X}-17}{7}$.

$$P\left(15 \leq \overline{X} \leq 18\right) = P\left(\frac{15-17}{7} \leq \frac{\overline{X}-17}{7} \leq \frac{18-17}{7}\right) = P\left(\frac{-2}{7} \leq \frac{\overline{X}-17}{7} \leq \frac{1}{7}\right) =$$

$$= P(-0{,}29 \leq Z \leq 0{,}14) = P(Z \leq 0{,}14) - P(Z \leq -0{,}29) =$$

$$= 0{,}5557 - P(Z \geq 0{,}29) = 0{,}5557 - [1 - P(Z < 0{,}29)] =$$

$$= 0{,}5557 - 1 + 0{,}6141 = 1{,}1698 - 1 = \underline{0{,}1698}.$$

****

5º) Se dispone de un dado equilibrado de seis caras, que se lanza seis veces con independencia. Calcular la probabilidad de sacar al menos un seis en los seis lanzamientos.

La probabilidad de sacar 6 es $\frac{1}{6}$ y la probabilidad de no sacar 6 es $\frac{5}{6}$.

La probabilidad pedida es igual que uno menos la probabilidad de no sacar ningún 6:

$$P = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 1 - \frac{5^6}{6^6} = 1 - \frac{15.625}{46.656} = 1 - \frac{46.656-15.625}{46.656} = 1 - \frac{31.031}{46.656} =$$

$$= 1 - 0,6651 = \underline{0,3349}.$$

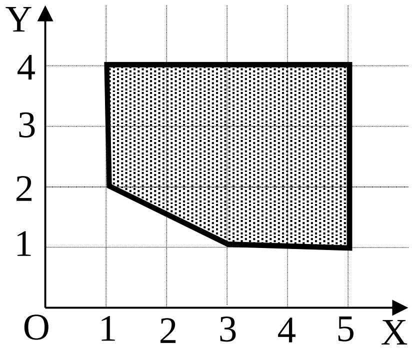
****

Parte A2.- Resuelve <u>los dos problemas</u> que se proponen a continuación.

6º) La región factible asociada a las restricciones impuestas para maximizar la función $f(x,y)=5x-y+5$ aparece representada en la figura siguiente.

a) Usando la figura, determinar el conjunto de restricciones del problema.

b) Obtener el máximo de la función $f(x,y)$ en la región factible.



c) Si añadimos la restricción $x \leq y+3$, ¿cuál es el máximo de $f(x,y)$ en este caso?

----

a)

Una de las restricciones es la recta que pasa por los puntos $P(1,2)$ y $Q(3,1)$. Siendo la recta $y=mx+n \Rightarrow \left.\begin{array}{r} P(1,2) \rightarrow 2=m+n \\ Q(3,1) \rightarrow 1=3m+n \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -2=-m-n \\ 1=3m+n \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2m=-1;\ \ m=-\frac{1}{2};\ \ n=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2} \Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$, o $x+2y=5$.

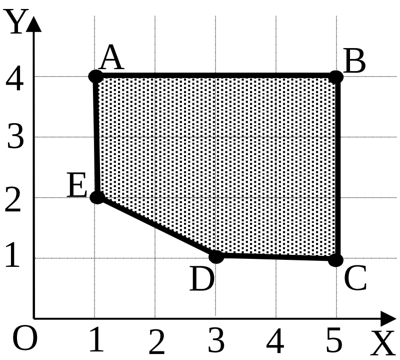
Como quiera que el origen no se encuentra en el semiplano que determina la recta hallada anteriormente, se considera la restricción $x+2y \geq 5$.

Las restricciones son: $\left.\begin{array}{r} 1 \leq x \leq 5 \\ 1 \leq y \leq 4 \\ x+2y \geq 5 \end{array}\right\}$ $o\ mejor$: $\underline{\left.\begin{array}{r} 1 \leq x, x \leq 5 \\ 1 \leq y, y \geq 4 \\ x+2y \geq 5 \end{array}\right\}}$.

b)

Los vértices de la región factible son los siguientes:

$A(1,4)$, $B(5,4)$, $C(5,1)$, $D(3,1)$ y E$(1,2)$.



Para cada uno de los vértices, el valor de la función de objetivos $f(x,y)=5x-y+5$ es el siguiente:

$A \Rightarrow f(1,4)=5 \cdot 1-4+5=5+1=6.$

$B \Rightarrow f(5,4) = 5 \cdot 5 - 4 + 5 = 25 + 1 = 26.$

$C \Rightarrow f(5,1) = 5 \cdot 5 - 1 + 5 = 25 + 4 = 29.$

$D \Rightarrow f(3,1) = 5 \cdot 3 - 1 + 5 = 15 + 4 = 19.$

$E \Rightarrow f(1,2) = 5 \cdot 1 - 2 + 5 = 5 + 3 = 8.$

El valor máximo de la función se obtiene en el punto $C(5,1)$.

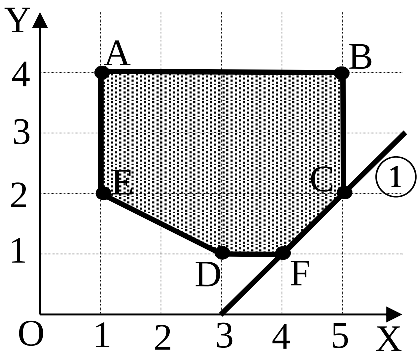
$$\underline{El\ valor\ máximo\ de\ la\ función\ de\ objetivos\ es\ 29.}$$

$c)$

Si se añade la restricción $x \leq y + 3$ la región de objetivos es la que indica la figura siguiente:

$① \Rightarrow x \leq y + 3 \Rightarrow y \geq x - 3 \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	3	5
y	0	2



Como se observa, añadiendo la restricción $x \leq y + 3$ desaparece el punto D y aparece el punto $F(4,1)$, en el cual la función de objetivos vale lo siguiente:

$F \Rightarrow f(4,1) = 5 \cdot 4 - 1 + 5 = 20 + 4 = 24.$

$$\underline{El\ valor\ máximo\ de\ la\ función\ sigue\ siendo\ el\ mismo.}$$

****

2º) Se da la función $f(x) = \frac{ax^2}{(x-1)(x-2)}$, donde a es un cierto parámetro real.

a) ¿Cuál es el valor de a si sabemos que la recta $y = 4$ es una asíntota horizontal para la función dada? Justificar la respuesta.

b) Para $a = 1$, estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y determinar sus extremos relativos.

c) Para $a = 1$, calcular $\lim_{x \to 1} \left[f(x) - \frac{1}{1-x} \right]$.

----

a)

Las asíntotas horizontales de una función racional son los valores finitos a los que tienen la función cuando x tiende a $\pm\infty$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax^2}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax^2}{x^2-3x+2} = 4 \Rightarrow a = 4.$$

$$\underline{La\ recta\ y = 4\ es\ asíntota\ de\ f(x)\ para\ a = 4}.$$

b)

Para $a = 1$ la función es $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)(x-2)} = \frac{x^2}{x^2-3x+2}$.

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando el valor de su primera derivada en ese punto es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot [x^2-3x+2] - x^2 \cdot (2x-3)}{(x-1)^2(x-2)^2} = \frac{2x^3-6x^2+4x-2x^3+3x^2}{(x-1)^2(x-2)^2} = \frac{-3x^2+4x}{(x-1)^2(x-2)^2} =$$

$$= \frac{-x \cdot (3x-4)}{(x-1)^2(x-2)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x \cdot (3x-4)}{(x-1)^2(x-2)^2} = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = \frac{4}{3}.$$

Como quiera que el denominador de $f'(x)$ es positivo para cualquier valor real del dominio de la función, que es: $D(f) \Rightarrow R - \{1, 2\}$.

Las raíces de la primera derivada dividen la recta real en tres intervalos de signos alternativos. Considerando, por ejemplo, que $f'(3) < 0$ y teniendo en cuanta el dominio de la función, los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función son los siguientes:

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: (-\infty, 0) \cup \left(\frac{4}{3}, 2\right) \cup (2, +\infty)}.$$

$$f'(x) > 0 \;\Rightarrow\; \underline{Crecimiento: (0,1) \cup \left(1, \tfrac{4}{3}\right)}.$$

Una función tiene un máximo relativo en un punto cuando se anula la primera derivada y es negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera y, tiene un mínimo relativo para los valores reales que anulan la primera derivada y hacen positiva la segunda derivada.

$$f'(x) = \frac{-3x^2+4x}{(x-1)^2(x-2)^2} = \frac{-3x^2+4x}{[(x-1)(x-2)]^2} = \frac{-x\cdot(3x-4)}{(x^2-3x+2)^2}.$$

$$f''(x) = \frac{(-6x+4)\cdot[(x-1)^2(x-2)^2]-[-x\cdot(3x-4)]\cdot 2\cdot(x-1)(x-2)\cdot(2x-3)}{(x-1)^4(x-2)^4} =$$

$$= \frac{(-6x+4)\cdot[(x-1)(x-2)]+x\cdot(3x-4)\cdot 2\cdot(2x-3)}{(x-1)^3(x-2)^3} = \frac{(-6x+4)\cdot(x^2-3x+2)+2x\cdot(6x^2-9x-8x+12)}{(x-1)^3(x-2)^3} =$$

$$= \frac{-6x^3+18x^2-12x+4x^2-12x+8+12x^3-34x^2+24x}{(x-1)^3(x-2)^3} = \frac{6x^3-12x^2+8}{(x-1)^3(x-2)^3} = \frac{2(3x^3-6x^2+4)}{(x-1)^3(x-2)^3}.$$

$$f''(0) = \frac{8}{8} = 1 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = 0 \;\Rightarrow\; \underline{Mínimo: O(0,0)}.$$

$$f''\left(\tfrac{4}{3}\right) = \frac{2\left[3\left(\frac{4}{3}\right)^3-6\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2+4\right]}{\left(\frac{4}{3}-1\right)^3\left(\frac{4}{3}-2\right)^3} = \frac{2\cdot\left(\frac{64}{9}-\frac{32}{3}+4\right)}{\frac{1}{27}\cdot\left(-\frac{8}{27}\right)} = \frac{2\cdot\frac{64-96+36}{9}}{-\frac{8}{27^2}} = \frac{\frac{8}{9}}{-\frac{8}{27^2}} < 0 \Rightarrow Máx.rela-$$

$$\text{-}tivo\ para\ x = \frac{4}{3}.\;\; f\left(\tfrac{4}{3}\right) = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2}{\left(\frac{4}{3}-1\right)\left(\frac{4}{3}-2\right)} = \frac{\frac{16}{9}}{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{\frac{16}{9}}{-\frac{2}{9}} = -8 \;\Rightarrow\; \underline{Máximo: A\left(\tfrac{4}{3}, -8\right)}.$$

$c)$

$$\lim_{x\to 1}\left[f(x) - \frac{1}{1-x}\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{x^2}{(x-1)(x-2)} + \frac{1}{x-1}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(x-1)(x-2)}. \quad (*)$$

$$x^2+x-2 = 0;\;\; x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 1.$$

$x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$. Sustituyendo este valor en (*):

$$\lim_{x\to 1}\left[f(x) - \frac{1}{1-x}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x-2} = \frac{1+2}{2-1} = 3.$$

$$\underline{Para\ a = 1\ es\ \lim_{x\to 1}\left[f(x) - \frac{1}{1-x}\right] = 3}.$$

****

OPCIÓN B

Parte A1. Responde a cuatro de las cinco preguntas que se plantean a continuación.

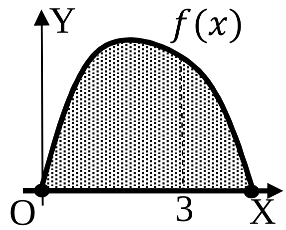
1º) ¿Para qué valor o valores del parámetro m el sistema $\begin{cases} -2x + y = 1 \\ (m-1)x + (m+2)y = 2 \end{cases}$ es incompatible? Resolver el sistema para m = 0.

2º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & x \end{pmatrix}$.

a) Calcular, para cualquier valor de x, la matriz $C = A^{-1} \cdot B$.

b) ¿Existe algún valor de x para el que la matriz C es igual a su traspuesta?

3º) Sea $f(x) = \begin{cases} 4x - x^2, & x \leq 3 \\ \frac{3}{2}(-x+5), & x > 3 \end{cases}$. Calcular el área limitada por la función $f(x)$ y el eje OX. El área solicitada aparece sombreada en la figura adjunta.



4º) Se sabe que en las bodegas de vino de Rioja el número de días necesarios para el proceso de fermentación de la uva en la elaboración de vinos tintos sigue una distribución normal de media 17 días con una desviación típica de 7 días. Con una muestra de 25 bodegas, calcular la probabilidad de que el proceso de fermentación tenga una duración media de entre 15 y 18 días.

5º) Se dispone de un dado equilibrado de seis caras, que se lanza seis veces con independencia. Calcular la probabilidad de sacar al menos un seis en los seis lanzamientos.

(Resueltos en el apartado anterior)

Parte A2.- Resuelve los dos problemas que se proponen a continuación.

6º) Una agencia de viajes ofrece tres tipos de paquetes a un mismo destino: PA, PB y PC. Los precios (en centenares de euros) son: 20 para el paquete PA, 18 para el paquete PB y 16 para el paquete PC. El número total de paquetes contratados durante este mes ha sido 22 y los ingresos obtenidos por la venta de estos paquetes ha sido de 386 (en centenares de euros). Si el número de paquetes contratados de tipo PC es el doble que el de PA, se pide:

a) Plantear el sistema de ecuaciones que determina el número de paquetes de cada tipo contratados.

b) Resolver el sistema de ecuaciones planteado en el apartado anterior.

c) Si el coste para la agencia de viajes de los paquetes PA es de 15, de los PB es de 14 y de los PC es de 13 (siempre en centenares de euros), ¿cuál ha sido el beneficio de la agencia derivado de la venta de estos paquetes durante este mes? Nota: para calcular los beneficios debes aplicar que Beneficios = Ingresos – Costes.

$a)$

Sean x, y, z el número de paquetes de los tipos PA, PB y PC que ofrece la agencia durante este mes, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=22 \\ 20x+18y+16z=386 \\ z=2x \end{array}\right\} \quad \underline{\left.\begin{array}{r} x+y+z=22 \\ 10x+9y+8z=193 \\ 2x-\ z=0 \end{array}\right\}}.$$

$b)$

$$z=2x \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+2x=22 \\ 10x+9y+16x=193 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 3x+y=22 \\ 26x+9y=193 \end{array}\right\} \Rightarrow y=22-3x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 26x+9\cdot(22-3x)=193;\ \ 26x+198-27x=193;\ -x=-5 \Rightarrow x=5.$$

$$y=22-15=7;\ \ z=10.$$

$$\underline{La\ agencia\ ofrece\ 5\ viajes\ PA, 7\ viajes\ PB\ y\ 10\ viajes\ PC.}$$

$c)$

El coste total para la agencia es el siguiente:

$$C=5\cdot15+7\cdot14+10\cdot13=75+98+130=303.$$

$$B=I-C=386-303=83.$$

$$\underline{El\ beneficio\ de\ la\ agencia\ es\ de\ 830\ euros.}$$

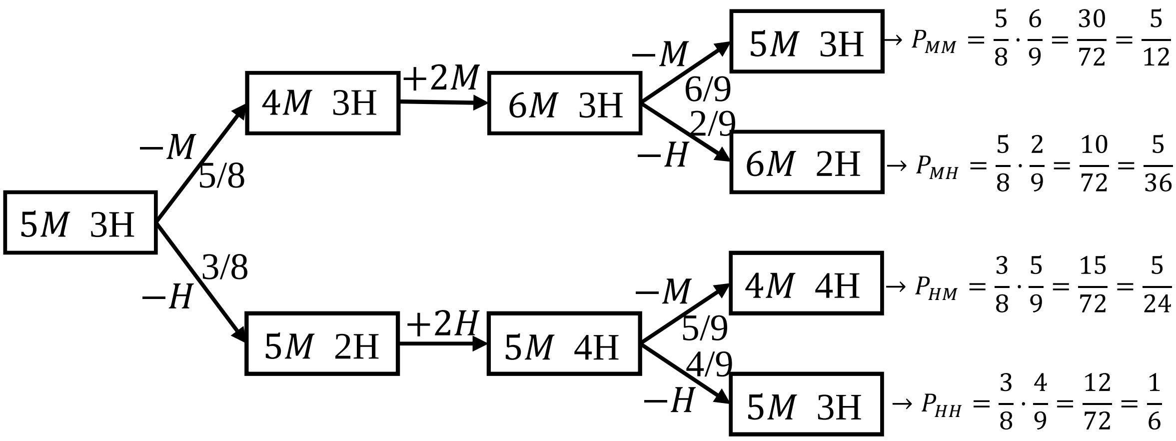
****

2º) En un estudio sobre hábitos de apareamiento entre ratones, se introducen en una jaula cinco ratones macho y tres ratones hembra. Se extrae uno de ellos aleatoriamente y se colocan en la jaula otros dos ratones del mismo sexo que el eliminado. Hecho esto, se elimina, también al azar, otro de los ratones.

a) Calcula la probabilidad de que el segundo ratón eliminado sea hembra.

b) Calcula la probabilidad de que en ambas eliminaciones se hayan extraído dos ratones del mismo sexo.

c) Si el segundo ratón eliminado ha sido una hembra, calcula la probabilidad de que el primero también lo haya sido.



a)

$$P = P_{MH} + P_{HH} = \frac{5}{36} + \frac{1}{6} = \frac{5+6}{36} = \frac{11}{36}.$$

b)

$$P = P_{MM} + P_{HH} = \frac{5}{12} + \frac{1}{6} = \frac{5+2}{12} = \frac{7}{12}.$$

c)

La probabilidad de que el primer eliminado sea hembra es: $\frac{3}{8}$.

$$P = \frac{\frac{11}{36}}{\frac{11}{36}+\frac{3}{8}} = \frac{\frac{22}{72}}{\frac{22+27}{72}} = \frac{22}{49}.$$

****