PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JULIO – 2019

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas. Se permite el uso de calculadores científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionan otra.

PROPUESTA A

Parte 1ª. Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación.

1º) Alba, Blanca y Naia son las delanteras titulares de un equipo de fútbol. Entre las tres, en la temporada recién finalizada, han marcado 65 goles. Sabemos que Alba ha marcado 50 % más goles que Blanca, y que Naia ha marcado la mitad de los goles de Alba. ¿Cuántos goles han marcado cada una?

Sean x, y, z los goles que marcaron la recién terminada temporada Alba, Blanca y Naia, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=65 \\ x=1{,}5y \\ z=\frac{x}{2} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y+z=65 \\ 2x-3y=0 \\ x-2z=0 \end{array}\right\}.$$ Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 65 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{65\cdot 6}{6+3+4}=\frac{65\cdot 6}{13}=5\cdot 6=30.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 65 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{13}=\frac{65\cdot 4}{13}=5\cdot 4=20.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 65 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{13} = \frac{65 \cdot 3}{13} = 5 \cdot 3 = 15.$$

$$\underline{Alba\ marcó\ 30\ goles, Blanca\ marcó\ 20\ goles\ y\ Naia, 15\ goles.}$$

****

2º) Sea la función $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$:

a) Determina la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Determina sus asíntotas.

c) Calcula el área que encierra el eje X, la tangente a la curva en el punto de abscisa $x = 1$ (calculada en el apartado anterior) y la recta $x = 2$.

----

a)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+1) - (x-1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

$$m = f'(1) = \frac{2}{(1+1)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

El punto de tangencia es $f(1) = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0 \Rightarrow P(1, 0)$.

La ecuación de la recta punto-pendiente es $y - y_0 = m(x - x_0)$.

$$y - 0 = \frac{1}{2} \cdot (x - 1);\ \ 2y = x - 1 \Rightarrow \underline{Tangente: t \equiv y = \frac{1}{2}(x - 1)}.$$

b)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1.$$

$$\underline{La\ recta\ y = 1\ es\ asíntota\ horizontal\ de\ la\ función.}$$

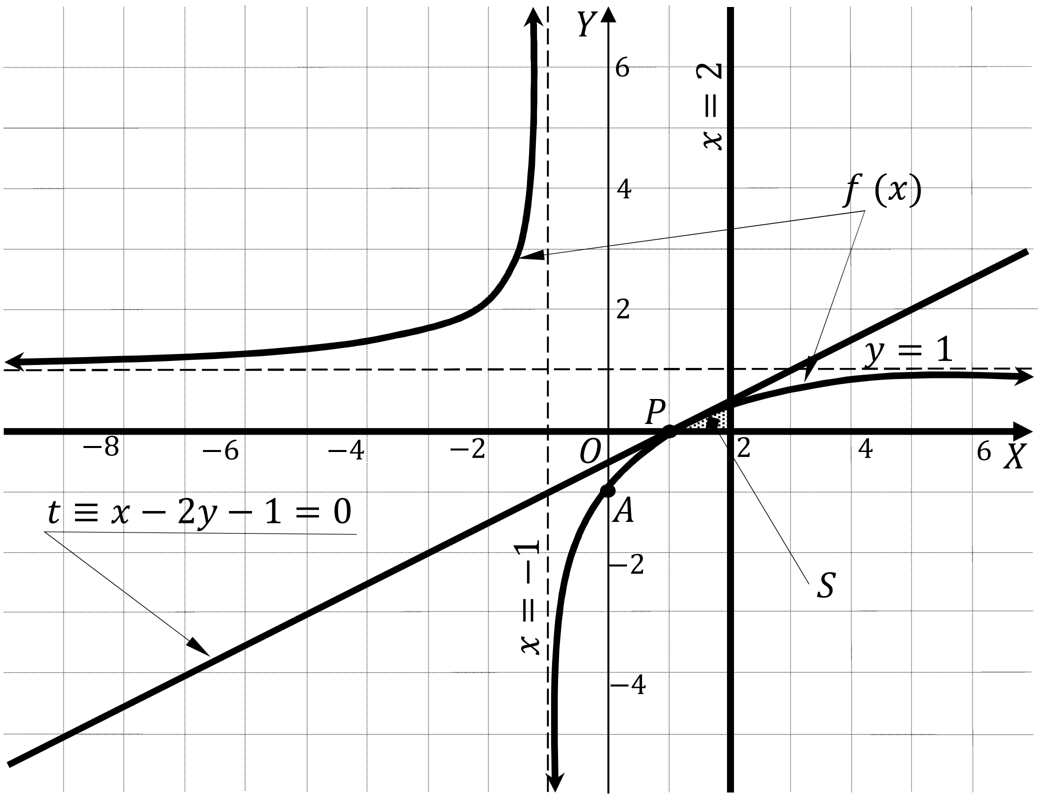
Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{La\ recta\ x = -1\ es\ asíntota\ vertical}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

c)

Con los datos obtenidos en los apartados anteriores puede hacerse una representación aproximada de la situación, que es la que indica la figura siguiente.



$$S = \int_1^2 \frac{1}{2}(x-1) \cdot dx = \frac{1}{2}\int_1^2 (x-1) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2^2}{2} - 2\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1^2}{2} - 1\right) = \frac{1}{2} \cdot (2-2) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \underline{\frac{1}{4}\ u^2}.$$

****

3º) La probabilidad de que Alberto conteste a un mensaje de Whatsapp es 0,1. En los últimos 20 minutos ha recibido 3 mensajes.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste a los tres?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste exactamente a uno?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste al menos a uno?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que no conteste a ninguno?

$Datos: p = 0{,}1;\;\; q = 0{,}9.$

a)

$$P = P(ppp) = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = \underline{0{,}001}.$$

b)

$$P = P(pqq) + P(qpq) + P(qqp) = 3 \cdot (0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9) = \underline{0{,}243}.$$

c)

El suceso contrario a "que conteste al menos a uno" es "que no conteste a ninguno", por lo cual la probabilidad pedida es la siguiente:

$$P = 1 - P(qqq) = 1 - 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 1 - 0{,}729 = \underline{0{,}271}$$

d)

$$P = P(qqq) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = \underline{0{,}729}$$

****

Parte 2ª. Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

4º) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcula A^2 y A^3.

$b)$ Teniendo en cuanta los resultados del apartado anterior, calcula A^{15}.

$c)$ ¿Existe alguna matriz X, (distinta de la matriz nula) que verifique $AX = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

$a)$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = A^2}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = A^3}.$$

$b)$

$$\underline{De\ lo\ anterior\ se\ deduce\ que\ A^{15} = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}.$$

$c)$

Sea la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, no siendo todos los elementos nulos.

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + c & 2b + d \\ -2a - c & -2b - d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 2a + c = 0 \\ 2b + d = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow c = -2a\ y\ d = -2b.$$

Por ejemplo: $\begin{Bmatrix} a = 1 \to c = -2 \\ b = 2 \to d = -4 \end{Bmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

$\underline{La\ respuesta\ es\ que\ existen\ infinitas\ matrices\ que\ cumplen\ la\ condición.}$

****

5º) Sea la función $f(x) = \frac{x^3}{2} - 3x^2$.

a) Estudia razonadamente sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcula sus extremos relativos y esboza una representación gráfica.

----

a)

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x. \qquad\qquad f''(x) = 3x - 6.$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}x^2 - 6x = 0;\ \ x^2 - 4x = 0;\ \ x(x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 4.$$

Por ser $f(x)$ polinómica, las raíces de la derivada dividen a la recta real en los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 4)$ y $(4, +\infty)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 1 \in (0, 4)$ es:

$$f'(1) = 1^2 - 6 \cdot 1 = 1 - 6 = -5 < 0 \Rightarrow Decreciente.$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)}.$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in (0, 4)}.$$

b)

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(0) = 2 \cdot 0 - 6 = -6 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow \underline{Máximo: O(0, 0)}.$$

$$f''(4) = 2 \cdot 4 - 6 = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 4.$$

$f(4) = \frac{4^3}{2} - 3 \cdot 4^2 = \frac{64}{2} - 48 = 32 - 48 = -16 \Rightarrow \underline{Mínimo: A(4, -16)}.$

Para la representación gráfica conviene saber que la función $f(x)$ tiene un punto de inflexión para $x = 3$, por lo siguiente:

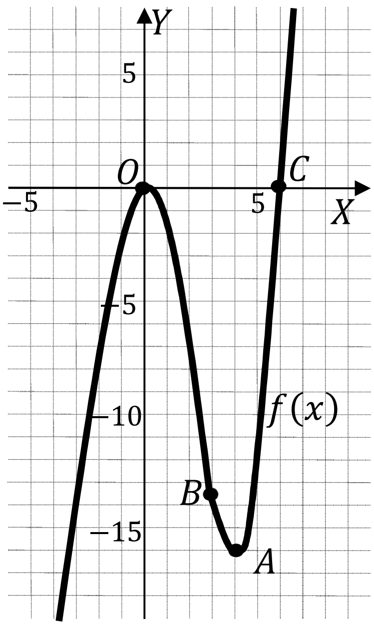
$f''(x) = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0;\ 2(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 3$ y $f'''(x) = 2 \neq 0.$

$f(3) = \frac{3^3}{2} - 3 \cdot 3^2 = \frac{27}{2} - 27 = \frac{27-54}{2} = -\frac{27}{2} \Rightarrow P.I. \Rightarrow B\left(3, -\frac{27}{2}\right).$

La función corta al eje OX, además de en el origen, en el punto siguiente:

$f(x) = \frac{x^3}{2} - 3x^2 = 0;\ \ x^2\left(\frac{x}{2} - 3\right) = 0 \Rightarrow x_2 = 6 \Rightarrow C(6, 0).$

La representación aproximada de la función es la siguiente.



****

6º) Una máquina envasa café en bolsas siguiendo una distribución normal de 500 gr de peso medio y una desviación típica de 30 gr. Las bolsas se empaquetan en cajas de 100 unidades.

a) Se toma al azar una caja de 100 bolsas, ¿cuál es la probabilidad de que la media de los pesos de las bolsas de esa caja sea menor 495 gr?

b) Cristina no conoce el peso medio de las bolsas, aunque conoce la desviación típica (30 gr). Ha pesado un paquete de 100 bolsas y ha obtenido un peso medio de 505 gr; con estos datos ha calculado un intervalo de confianza del 95 % para la media. ¿Cuál es el intervalo determinado por Cristina?

----

a)

$Datos$: $\mu = 500;\ \ n = 100;\ \ \sigma = 30.$

$$X \to N\left(\mu;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(500;\ \frac{30}{\sqrt{100}}\right) = N(500;\ 3).$$

$$P = P(X < 495) = P\left(Z < \frac{495-500}{3}\right) = P\left(Z < \frac{-5}{3}\right) = P(Z < -1{,}67) =$$

$$= 1 - P(Z < 1{,}67) = 1 - 0{,}9525 = \underline{0{,}0475}.$$

b)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1 - \alpha = 0{,}95\ \to\ \alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05\ \to\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$
$(1 - 0{,}025 = 0{,}9750\ \to z = 1{,}96).$

Datos: $n = 100;\ \ \overline{x} = 505;\ \ \sigma = 30\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(505 - 1{,}96 \cdot \frac{30}{\sqrt{100}};\ 505 + 1{,}96 \cdot \frac{30}{\sqrt{100}}\right);\ \ (505 - 1{,}96 \cdot 3;\ 505 + 1{,}96 \cdot 3);$$

$$(505 - 5{,}88;\ 505 + 5{,}88).$$

$$\underline{I.C._{95\,\%} = (499{,}12;\ 510{,}88).}$$

****

PROPUESTA B

Parte 1ª. Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación.

1º) Alba, Blanca y Naia son las delanteras titulares de un equipo de fútbol. Entre las tres, en la temporada recién finalizada, han marcado 65 goles. Sabemos que Alba ha marcado 50 % más goles que Blanca, y que Naia ha marcado la mitad de los goles de Alba. ¿Cuántos goles han marcado cada una?

2º) Sea la función $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$:

a) Determina la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Determina sus asíntotas.

c) Calcula el área que encierra el eje X, la tangente a la curva en el punto de abscisa $x = 1$ (calculada en el apartado anterior) y la recta $x = 2$.

3º) La probabilidad de que Alberto conteste a un mensaje de Whatsapp es 0,1. En los últimos 20 minutos ha recibido 3 mensajes.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste a los tres?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste exactamente a uno?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste al menos a uno?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que no conteste a ninguno?

(Resueltos en la primera parte)

Parte 2ª. Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

4º) Para fabricar coches y cunas de bebé disponemos de 80 kg de acero y 120 kg de aluminio. Cada coche se venderá a 200 euros y cada cuna a 150 euros. Para fabricar un coche son necesarios 1 kg de acero y 3 kg de aluminio y para fabricar una cuna 2 kg de acero y 2 kg de aluminio.

a) Dibuja en el plano la región factible que represente las posibles cantidades de coches y cunas que podemos fabricar (respetando las restricciones del problema).

b) Escribe la función que representa los ingresos que se obtienen por las ventas e indica el número de coches y de cunas que se debe fabricar para conseguir los máximos ingresos posibles.

----

a)

Sean x e y el número de coches y cunas que se fabrican, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} x+2y \leq 80 \\ 3x+2y \leq 120 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$.

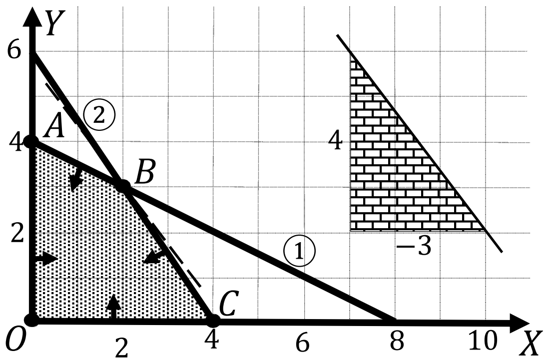
① $\Rightarrow x+2y \leq 80 \Rightarrow y \leq \frac{80-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	80
y	40	0

② $\Rightarrow 3x+2y \leq 120 \Rightarrow y \leq \frac{120-3x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	40
y	60	0

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.



Los vértices de la sección factible, además del origen, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+2y=80 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,40).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=80 \\ 3x+2y=120 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x-2y=-80 \\ 3x+2y=120 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$2x=40;\ \ x=20;\ \ 20+2y=80;\ \ 2y=60;\ \ y=30 \Rightarrow B(20,30)$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ 3x+2y=120 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=130;\ \ x=40 \Rightarrow C(40,0).$

b)

Función de objetivos es la siguiente: $\underline{f(x,y)=200x+150y}$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,40) = 200 \cdot 0 + 150 \cdot 40 = 0 + 6.000 = 6.000.$

$B \Rightarrow f(20,30) = 200 \cdot 20 + 150 \cdot 30 = 4.000 + 4.500 = 8.500.$

$C \Rightarrow f(40,0) = 200 \cdot 40 + 150 \cdot 0 = 8.000 + 0 = 8.000.$

El valor máximo se produce en el punto $B(20,30)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y) = 200x + 150y = 0 \Rightarrow y = -\frac{200}{150}x = -\frac{20}{15}x = -\frac{4}{3}x \Rightarrow m = \frac{4}{-3}.$$

$$\underline{Los\ máximos\ ingresos\ se\ consiguen\ fabricando\ 20\ coches\ y\ 30\ cunas.}$$

$$\underline{El\ benefico\ máximo\ es\ de\ 8.500\ euros.}$$

****

5º) Sea la función $f(x) = \frac{2x}{4-x^2}$.

a) Estudia razonadamente sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcula sus asíntotas si las tiene y esboza una representación gráfica.

----

a)

El dominio de la función es $D(f) \Rightarrow R - \{-2, 2\}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{2\cdot(4-x^2)-2x\cdot(-2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{8-2x^2+4x^2}{(4-x^2)^2} = \frac{2x^2+8}{(4-x^2)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2+8}{(4-x^2)^2} = 0;\;\; 2x^2+8=0 \Rightarrow x \notin R \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in D(f).$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)}.$$

b)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{4-x^2} = 0.$$

$$\underline{La\ recta\ y = 0\ (Eje\ de\ abscisas)\ es\ asíntota\ horizontal\ de\ la\ función.}$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

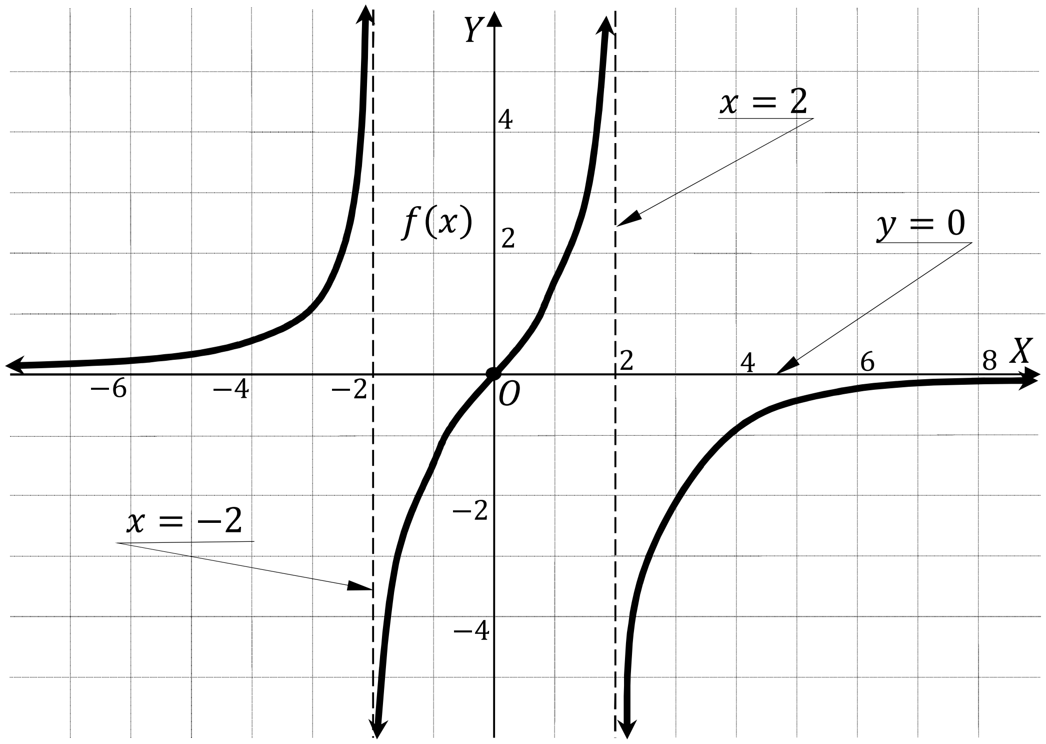
$$4 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2.$$

$$\underline{Las\ rectas\ x = -2\ y\ x = 2\ son\ asíntotas\ verticales.}$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

Para la representación gráfica de la función se tiene en cuenta, además de todo lo anterior, que pasa por el origen de coordenadas, que es el único punto de corte con los ejes.

La representación aproximada de la función es la siguiente.



Y
X
4
2
−2
−4
−6
−4
−2
2
4
6
8
O
f(x)
x = 2
y = 0
x = −2

****

6º) El peso de los estudiantes que ingresan en la Universidad sigue una distribución normal de desviación típica 15 kg.

a) Si el peso medio fuese 70 kr, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de 100 estudiantes superase los 72 kr?

b) El peso medio de una muestra de 225 alumnos es de 72 kr, determina un intervalo de confianza del 95 % para el peso medio de los estudiantes que ingresan en la Universidad.

----

a)

$Datos$: $\mu = 70;\ \ n = 100;\ \ \sigma = 15.$

$$X \to N\left(\mu;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(70;\ \frac{15}{\sqrt{100}}\right) = N(70;\ 1{,}5).$$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-70}{1{,}5}$.

$$P = P(X > 72) = P\left(Z > \frac{72-70}{1{,}5}\right) = P\left(Z > \frac{2}{1{,}5}\right) = P(Z > 1{,}33) =$$

$$= 1 - P(Z < 1{,}33) = 1 - 0{,}9082 = \underline{0{,}0918}.$$

b)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1 - \alpha = 0{,}95\ \to\ \alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05\ \to\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$$
$$(1 - 0{,}025 = 0{,}9750\ \to z = 1{,}96).$$

Datos: $n = 225;\ \ \overline{x} = 72;\ \ \sigma = 15\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(72 - 1{,}96 \cdot \frac{15}{\sqrt{225}};\ 72 + 1{,}96 \cdot \frac{15}{\sqrt{225}}\right);\ \ (72 - 1{,}96 \cdot 1;\ 72 + 1{,}96 \cdot 1);$$

$$(72 - 1{,}96;\ 72 + 1{,}96).$$

$$\underline{I.C._{95\,\%} = (70{,}04;\ 73{,}96)}.$$

****