

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)**UNIVERSIDAD DE LA RIOJA****SEPTIEMBRE – 2020**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

El examen está distribuido en tres bloques que contienen tres ejercicios cada uno de ellos. De cada uno de los bloques, el alumno podrá contestar como máximo a dos ejercicios. En total deberá contestar a 4 ejercicios. Es decir, podrá contestar a dos ejercicios de un bloque y a uno de cada uno de los otros dos, o bien elegir dos bloques y contestar a dos ejercicios de cada uno. Es necesario justificar las respuestas. Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionan otra.

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

1º) De los bebés que se han inscrito en el mes de mayo en el registro civil de Logroño, 63 tienen nombre Alba, Lucía, Pedro o Mateo. 48 de ellos tienen los nombres de Alba, Pedro o Mateo. Sabemos que el número de bebés inscritos con el nombre de Pedro es igual a la suma de los inscritos con los nombres de Alba y Mateo; además se han inscrito tantos bebés con el nombre de Alba como la suma de la mitad de los inscritos con el nombre de Pedro más los inscritos con el nombre de Mateo.

a) ¿Cuántos de estos bebés se llaman Alba? ¿Cuántos Pedro? ¿Cuántos Mateo?

b) ¿Cuántos bebés se llaman Lucía?

a, b)

Sean x, y, z, t los bebés registrados en Logroño con los nombres de Alba, Lucía, Pedro y Mateo, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z + t = 63 \\ x + z + t = 48 \\ z = x + t \\ x = \frac{z}{2} + t \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x + y + z + t = 63 \\ x + z + t = 48 \\ x - z + t = 0 \\ 2x - z - 2t = 0 \end{array} \right\}.$$

Restando a la primera ecuación la segunda: $y = 63 - 48 = 15$.

Se llaman Lucía 15 de los bebés registrados.

$$\text{El sistema resulta: } \left. \begin{array}{l} x + z + t = 48 \\ x - z + t = 0 \\ 2x - z - 2t = 0 \end{array} \right\}$$

Restando a la primera ecuación la segunda: $2z = 48$; $z = 24$.

Se llaman Pedro 24 de los bebés registrados.

$$\text{El sistema resulta: } \left. \begin{array}{l} x + 24 + t = 48 \\ 2x - 24 - 2t = 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x + t = 24 \\ 2x - 2t = 24 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x + t = 24 \\ x - t = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = 36; x = 18. \quad 18 + t = 24; t = 24 - 18 \Rightarrow t = 6.$$

Se llaman Alba 18 de los bebés registrados y 6 se llaman Mateo.

2º) Si $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$:

a) Calcula A^2 y A^3 .

b) Teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, calcula A^{15} y A^{30} .

c) Resuelve la ecuación matricial $AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.}}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A.}}$$

b)

$$A^{15} = A^{14} \cdot A = (A^2)^7 \cdot A = I^7 \cdot A = I \cdot A = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A.}}$$

$$A^{30} = A^{15} \cdot A^{15} = A \cdot A = \underline{\underline{A^2 = I.}}$$

c)

Teniendo en cuenta que $A^2 = I$, del apartado a):

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; A \cdot A \cdot X = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; A^2 \cdot X = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$I \cdot X = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{X = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.}}$$

$$X = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}}$$

3º) Julián dispone de 10 hectáreas de terreno para cultivar dos variedades de uva: tempranillo y viura. El beneficio que le produce una hectárea de tempranillo es de 2.000 euros y la de viura, 3.000 euros. Dispone de 180 kg de productos fitosanitarios; una hectárea de tempranillo precisa de 10 kg de estos productos y una hectárea de viura 20. Vendimiar una hectárea de tempranillo le cuesta 20 horas y una de viura 10 horas; dispone de un total de 160 horas de trabajo de vendimiadores.

a) ¿Cómo puede distribuir Julián el cultivo de sus 10 hectáreas respetando sus restricciones? Dibuja en el plano la región factible que represente los posibles repartos.

b) Escribe la función que representa el beneficio que obtiene Julián. ¿Con qué distribución obtiene el máximo beneficio? Calcula dicho máximo.

a, b)

Sean x e y el número de hectáreas plantadas con las variedades tempranillo y viura, respectivamente.

La función de objetivos es $f(x, y) = 2.000x + 3.000y$.

Las restricciones son las siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 10 \\ 10x + 20y \leq 180 \\ 20x + 10y \leq 160 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + y \leq 10 \\ x + 2y \leq 18 \\ 2x + y \leq 16 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array}$$

① $\Rightarrow x + y \leq 10 \Rightarrow y \leq 10 - x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

x	0	10
y	10	0

② $\Rightarrow x + 2y \leq 18 \Rightarrow y \leq \frac{18-2x}{2} \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

x	0	18
y	9	0

③ $\Rightarrow 2x + y \leq 16 \Rightarrow y \leq 16 - 2x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

x	0	8
y	16	0

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

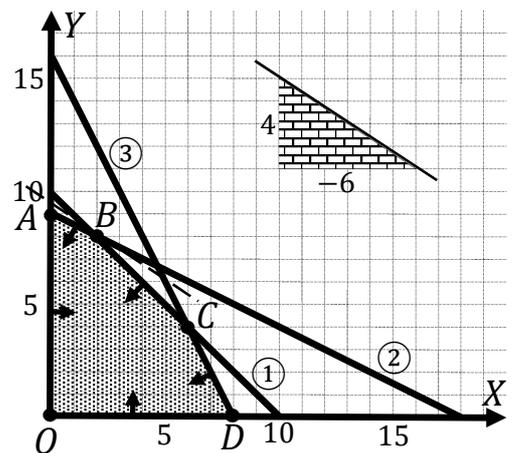
Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x + 2y = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow A(0, 9).$

$B \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 10 \\ x + 2y = 18 \\ -x - y = -10 \\ x + 2y = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 8; x = 2 \Rightarrow B(2, 8).$

$C \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 0 \\ 2x + y = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 9 \Rightarrow C(9, 0).$



Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(0, 9) = 2.000 \cdot 0 + 3.000 \cdot 9 = 0 + 27.000 = 27.000.$$

$$B \Rightarrow f(2, 8) = 2.000 \cdot 2 + 3.000 \cdot 8 = 4.000 + 24.000 = 28.000.$$

$$C \Rightarrow f(9, 0) = 2.000 \cdot 9 + 3.000 \cdot 0 = 18.000 + 0 = 18.000.$$

El valor máximo se produce en el punto $B(2, 8)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 2.000x + 3.000y = 0 \Rightarrow y = -\frac{2.000}{3.000}x = -\frac{2}{3}x \Rightarrow m = -\frac{2}{3}.$$

Obtiene el máximo beneficio cultivando 2 ha de tempranillo y 8 de viura.

El máximo beneficio es de 28.000 euros.

Bloque 2. Análisis.

4º) Sea la función $f(t) = \begin{cases} 2t^2, & 0 \leq t < 1 \\ 3t - 1, & 1 \leq t < 2 \\ -5t + 15, & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$.

a) Estudia razonadamente su continuidad.

b) Haz una representación gráfica de la función f .

c) Si la función f representa la asistencia (en miles de personas) a un festival de música en función del tiempo t (medido en horas). ¿En qué momento la asistencia fue máxima? (Para qué valor de t). ¿Cuántas personas había en el festival en ese momento?

a)

La función $f(t)$ es continua en \mathbb{R} , excepto para $t = 1$ y $t = 2$, cuya continuidad es dudosa y se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$\text{Para } t = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1} (2t^2) = 2 \\ \lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1} (3t - 1) = 2 = f(1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = f(1) \Rightarrow \underline{\text{La función } f(t) \text{ es continua para } t = 1.}$$

$$\text{Para } t = 2 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 2^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2} (3t - 1) = 5 \\ \lim_{t \rightarrow 2^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2} (-5t + 15) = 5 = f(2) \end{cases} \Rightarrow$$

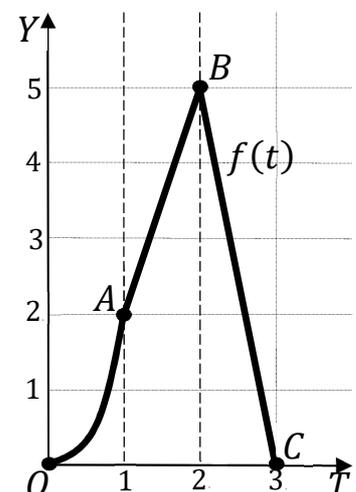
$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 2^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2^+} f(t) = f(2) \Rightarrow \underline{\text{La función } f(t) \text{ es continua para } t = 2.}$$

b)

En el intervalo $[0, 1)$ la función es la parábola de ecuación $f(t) = 2t^2$, que es convexa (\cup) por ser positivo el coeficiente de t^2 y cuyo vértice (mínimo) es el origen.

En el intervalo $[1, 2)$ la función es la recta de ecuación $f(t) = 3t - 1$, que tiene como extremos a los puntos $A(1, 2)$ y $B(2, 5)$.

En el intervalo $[2, 3]$ la función es la recta de ecuación $f(t) = -5t + 15$, que tiene como extremos a los puntos $B(2, 5)$ y $C(3, 0)$.



c) Si la función f representa la asistencia (en miles de personas) a un festival de música en función del tiempo t (medido en horas). ¿En qué momento la asistencia fue máxima? (Para qué valor de t). ¿Cuántas personas había en el festival en ese momento?

De la observación de la gráfica de la función se deduce que:

La asistencia fue máxima para $t = 2$.

La asistencia máxima al festival fue de 5.000 personas.

5º) Sea la función $f(x) = ax^2 + bx + c$:

a) Determina a, b y c sabiendo que el punto $P(-2, 1)$ pertenece a la gráfica de la función f y que, además, el punto $Q(-1, 0)$ es un extremo relativo de f .

b) Determina el área que encierra la gráfica de f y el eje OX en el intervalo $[0, 3]$.

Nota: Si no has conseguido determinar a, b y c , en el apartado anterior, toma los valores $a = 1, b = 2$ y $c = 1$ en este apartado.

a)

Por contener al punto $P(-2, 1) \Rightarrow f(-2) = 1$:

$$f(-2) = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 1; \quad 4a - 2b + c = 1. \quad (1)$$

Por contener al punto $Q(-1, 0) \Rightarrow f(-1) = 0$:

$$f(-1) = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 0; \quad a - b + c = 0. \quad (2)$$

Por tener un extremo relativo en $Q(-1, 0) \Rightarrow f'(-1) = 0$:

$$f'(x) = 2ax + b.$$

$$f'(-1) = 2a \cdot (-1) + b = 0; \quad -2a + b = 0. \quad (3)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y (3):

$$\left. \begin{array}{l} 4a - 2b + c = 1 \\ a - b + c = 0 \\ -2a + b = 0 \end{array} \right\} \text{Restando a la primera ecuación la segunda:}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3a - b = 1 \\ -2a + b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{a = 1}. \quad -2 + b = 0 \Rightarrow \underline{b = 2}.$$

$$a - b + c = 0 \Rightarrow 1 - 2 + c = 0 \Rightarrow \underline{c = 1}.$$

b)

La función resulta ser $f(x) = x^2 + 2x + 1$, que tiene todas sus ordenadas positivas en el intervalo $[0, 3]$, por lo cual la superficie pedida es la siguiente:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 (x^2 + 2x + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + x \right]_0^3 = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right]_0^3 \\ &= \left(\frac{3^3}{3} + 3^2 + 3 \right) - 0 = 9 + 9 + 3 = \underline{21 u^2}. \end{aligned}$$

6°) La producción de un invernadero depende de la temperatura a la que esté regulado. La cantidad de toneladas de verduras que produce viene dada por la siguiente función, en que x indica la temperatura en grados Celsius: $f(x) = (x + 3)^2(36 - x)$, con $(0 \leq x \leq 36)$.

a) ¿Para qué valor de x se obtiene la máxima producción?

b) ¿Cuántas toneladas se obtienen a esa temperatura?

c) ¿Para qué valores de x el invernadero no produce nada?

a)

Los valores de la función en los extremos del intervalo de su dominio son los siguientes:

$$f(0) = (0 + 3)^2 \cdot (36 - 0) = 9 \cdot 36 = 324.$$

$$f(36) = (36 + 3)^2 \cdot (36 - 36) = 0.$$

Una función tiene un máximo relativo cuando se anula su primera derivada y es negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$\begin{aligned} f'(x) &= [2 \cdot (x + 3) \cdot 1] \cdot (36 - x) + (x + 3)^2 \cdot (-1) = \\ &= (x + 3) \cdot [2 \cdot (36 - x) - (x + 3)] = (x + 3) \cdot (72 - 2x - x - 3) = \\ &= (x + 3) \cdot (69 - 3x) = 3 \cdot (x + 3) \cdot (23 - x). \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3 \cdot (x + 3) \cdot (23 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 23.$$

La solución $x_1 = -3$ no pertenece al dominio de la función.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 3 \cdot [1 \cdot (23 - x) + (x + 3) \cdot (-1)] = 3 \cdot (23 - x - x - 3) = \\ &= 3 \cdot (20 - 2x) = 6 \cdot (10 - x) \end{aligned}$$

$$f''(23) = 6 \cdot (10 - 23) = 6 \cdot (-13) < 0 \Rightarrow \text{Máximo relativo para } x = 23.$$

$$f(23) = (23 + 3)^2 \cdot (36 - 23) = 26^2 \cdot 13 = 676 \cdot 13 = 8.788.$$

El máximo rendimiento del invernadero se produce para $x = 23^\circ \text{C}$.

b)

El máximo rendimiento que produce a 23°C es de 8.788 toneladas.

c)

Como quiera que no se prevé una temperatura de $-3^{\circ} C$ (que también se anularía la producción):

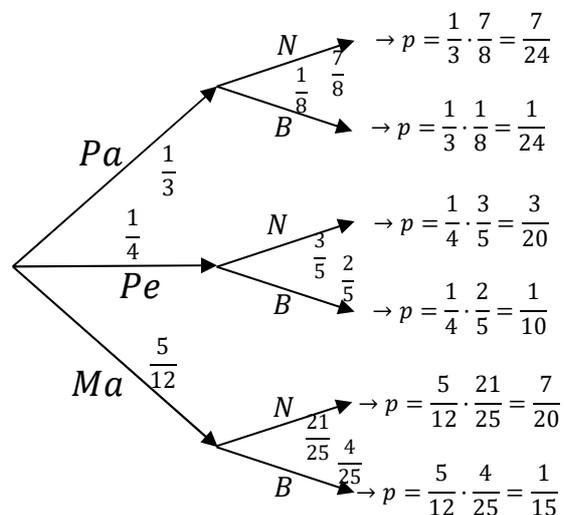
La producción del invernadero es nula a partir de $36^{\circ} C$.

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

7º) En una residencia canina hay en total 120 perros; de ellos 40 son pastores alemanes (35 negros y 5 blancos), 30 pekineses (18 negros y 12 blancos) y 50 mastines (42 negros y 8 blancos).

- a) Hemos elegido un perro al azar, ¿cuál es la probabilidad de que NO sea pekinés?
- b) Elegido al azar un perro, ¿cuál es la probabilidad de que sea de color blanco?
- c) Se ha elegido al azar un perro que ha resultado ser blanco, ¿cuál es la probabilidad de que sea un mastín?

$$\text{Datos: } \left\{ \begin{array}{l} P(Pa) = \frac{40}{120} = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} P(n) = \frac{35}{40} = \frac{7}{8} \\ P(b) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8} \end{cases} \\ P(Pe) = \frac{30}{120} = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} P(n) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} \\ P(b) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5} \end{cases} \\ P(Ma) = \frac{50}{120} = \frac{5}{12} \Rightarrow \begin{cases} P(n) = \frac{42}{50} = \frac{21}{25} \\ P(b) = \frac{8}{50} = \frac{4}{25} \end{cases} \end{array} \right.$$



a)

$$P = P(\overline{Pe}) = 1 - P(Pe) = 1 - \frac{30}{120} = 1 - \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{3}{4} = 0,75}}$$

b)

$$\begin{aligned} P &= P(B) = P(Pa \cap B) + P(Pe \cap B) + P(Ma \cap B) = \\ &= P(Pa) \cdot P(B/Pa) + P(Pe) \cdot P(B/Pe) + P(Ma) \cdot P(B/Ma) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{25} = \frac{1}{24} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{5+12+8}{120} = \frac{25}{120} = \frac{5}{24} = \underline{\underline{0,2083}} \end{aligned}$$

También puede hacerse este apartado por la regla de Laplace:

$$P = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{n^{\circ} \text{ de perros blancos}}{n^{\circ} \text{ de perros}} = \frac{5+12+8}{120} = \frac{25}{120} = \frac{5}{24} = \underline{\underline{0,2083.}}$$

c)

$$P = P(Ma/B) = \frac{P(Ma \cap B)}{P(B)} = \frac{P(Ma) \cdot P(B/Ma)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{12} \cdot \frac{4}{25}}{\frac{5}{24}} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{5}{24}} = \frac{24}{75} = \frac{8}{25} = \underline{\underline{0,32.}}$$

8º) La vida media de un modelo de grapadoras sigue una distribución normal con una desviación típica de 60 días.

a) Si la media fuese de 950 días, ¿cuál sería la probabilidad de que la duración media de una muestra de 100 grapadoras superase los 959 días?

b) Si una muestra de 64 grapadoras tiene una vida media de 980 días, determina un intervalo de confianza del 90 % para la media de la producción.

a)

Datos: $\mu = 950$; $n = 100$; $\sigma = 60$.

$$X \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(950, \frac{60}{\sqrt{100}}\right) = N\left(950, \frac{60}{10}\right) = N(950, 6).$$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-950}{6}$.

$$P = P(X > 959) = P\left(Z > \frac{959-950}{6}\right) = P\left(Z > \frac{9}{6}\right) = P(Z > 1,5) = \\ = 1 - P(Z \leq 1,5) = 1 - 0,9332 = \underline{0,0668}.$$

b)

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 1 - 0,90 = 0,10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,645. \\ (1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645).$$

Datos: $n = 64$; $\bar{x} = 980$; $\sigma = 60$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de \bar{x} , σ y n , es la siguiente: $\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(980 - 1,645 \cdot \frac{60}{\sqrt{64}}; 980 + 1,645 \cdot \frac{60}{\sqrt{64}}\right);$$

$$(980 - 1,645 \cdot 7,5; 980 + 1,645 \cdot 7,5); (980 - 12,3375; 980 + 12,3375).$$

$$\underline{I.C._{90\%} = (967,6625; 992,3375)}.$$

9º) Luis ha hecho una cartulina con cada una de las siete letras de LA RIOJA y las ha introducido en una urna.

a) Si extrae una cartulina, ¿cuál es la probabilidad de que sea la R?, ¿cuál es la probabilidad de que NO sea la A?

b) Luis extrae una cartulina y, a continuación, sin volver a introducir la primera, saca otra y se las muestra en ese orden a María, ¿cuál es la probabilidad de que María vea LA?

c) Luis repite la operación y le vuelve a mostrar las cartas a María. ¿Cuál es la probabilidad de que María pueda formar la palabra LA?, ¿y de que pueda formar la palabra LO?

d) Luis extrae ahora tres cartulinas sin reemplazar después de cada extracción. ¿Cuál es la probabilidad de que María lea RIO si se las muestra en el orden en el que Luis las ha extraído? ¿Y de que lea RIA?

a)

$$P = P(R) = \frac{1}{7} = 0,1429. \quad P = P(\text{No A}) = \frac{5}{7} = 0,7143.$$

b)

$$P = P(LA) = \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{21} = 0,0476.$$

c)

$$P = P(LA) + P(AL) = \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{21} + \frac{1}{21} = \frac{2}{21} = 0,0952.$$

d)

$$P = P(RIO) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{210} = 0,0048.$$

$$P = P(RIA) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{105} = 0,0095.$$
