PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JUNIO - 2001

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas.

OPCIÓN A

1º) Utilizando las propiedades de los determinantes, resolver, sin calcular el determinante, la ecuación: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$.

Restando la primera fila a las otras dos: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x^2-1 \end{vmatrix} = 0$

Desarrollando por los menores adjuntos de la primera columna: $\begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ 0 & x^2-1 \end{vmatrix} = 0$.

Desarrollando por los menores adjuntos de la primera columna:

$$(x-1)(x^2-1) = 0 \;;;\; (x-1)(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{x_1 = x_2 = 1}} \\ \\ \underline{\underline{x_3 = -1}} \end{cases}.$$

****

2º) Calcular los valores de x e y para que el vector $\overrightarrow{u} = (x,\ y,\ 1)$ sea ortogonal a los vectores $\overrightarrow{v} = (3,\ 2,\ 0)$ y $\overrightarrow{w} = (2,\ 0,\ -1)$.

Dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar es cero.

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \ \Rightarrow \ (x,\ y,\ 1) \cdot (3,\ 2,\ 0) = \underline{3x + 2y = 0}$$

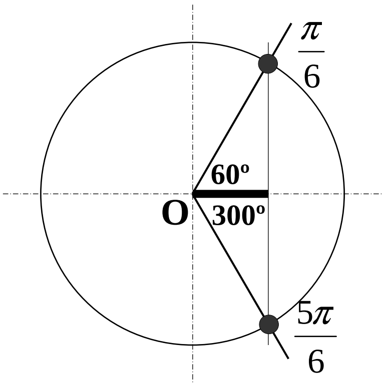
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = 0 \ \Rightarrow \ (x,\ y,\ 1) \cdot (2,\ 0,\ -1) = \underline{2x - 1 = 0} \ \ \Rightarrow \ \ \underline{\underline{x = \frac{1}{2}}}$$

$$3x + 2y = 0 \ \Rightarrow \ \frac{3}{2} + 2y = 0 \ ;; \ 3 + 4y = 0 \ ;; \ \underline{\underline{y = -\frac{3}{4}}}$$

****

3º) Considerar la función $f:[0,\,2\pi]\rightarrow R$ definida por $f(x)=x+5-2\,sen\,x$. Hallar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos.

$$f'(x)=1-2\cos\,x\ ;;\ f'(x)=0,\ x\in[0,\,2\pi]\Rightarrow 1=2\cos\,x\ ;;\ \cos\,x=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \begin{cases} x_1=\dfrac{\pi}{6} \\ x_2=\dfrac{5\pi}{6}\end{cases}$$



$$f'(x)>0\ \Rightarrow\ \cos\,x<\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\left(\frac{\pi}{6},\,\frac{5\pi}{6}\right)\ \Rightarrow\ Creciente}}$$

$$f'(x)<0\ \Rightarrow\ \cos\,x>\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\left(0,\,\frac{\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6},\,2\pi\right)\Rightarrow\ Decreciente}}$$

$$f''(x)=2\,sen\,x\ \Rightarrow\ f''\left(\tfrac{\pi}{6}\right)=2\,sen\frac{\pi}{6}=2\,sen\ 60º=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}>0\ \Rightarrow\ Mínimo\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f\left(\tfrac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}+5-2\,sen\ 60º=\frac{\pi}{6}+5-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi+30-6\sqrt{3}}{6}\ \ \Rightarrow\ \underline{\underline{Mín\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi+30-6\sqrt{3}}{6}\right)}}$$

$$f''\left(\tfrac{5\pi}{6}\right)=2\,sen\frac{5\pi}{6}=2\,sen\ (-60º)=-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}<0\ \Rightarrow\ Máximo\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f\left(\tfrac{5\pi}{6}\right)=\frac{5\pi}{6}+5+2\,sen\ 60º=\frac{5\pi}{6}+5+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\pi+30+6\sqrt{3}}{6}\Rightarrow\underline{\underline{Máx\left(\frac{5\pi}{6},\ \frac{\pi+30+6\sqrt{3}}{6}\right)}}$$

****

4º) Determinar el valor de a para el cual $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+3}{x} \right)^{a\,x} = e$.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{a\,x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^{a\,x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{3}} \right)^{a\,x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{3}} \right)^{\frac{x}{3} \cdot \frac{3}{x} \cdot a\,x} =$$

$$= \left[\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{3}} \right)^{\frac{x}{3}} \right]^{\frac{3}{x} \cdot a\,x} = \left[\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{3}} \right)^{\frac{x}{3}} \right]^{3a} = e \;\Rightarrow\; 3a = 1 \;;;\; \underline{\underline{a = \frac{1}{3}}}$$

****

5º) Estudiar, según los valores de m, y resolver cuando sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+3z=1 \\ x+my+3z=3 \\ y-6z=0 \\ 3y-z=2 \end{array}\right\}$$

Como hay tres de las cuatro ecuaciones que no dependen de m, resolvemos el sistema que forman, que es:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+3z=1 \\ y-6z=0 \\ 3y-z=2 \end{array}\right\}$$

Resolviendo, aplicando la Regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-1-24-6+18}{-1+18}=\frac{18-31}{17}=\underline{\underline{-\frac{13}{17}=x}} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{17}=\underline{\underline{\frac{12}{17}=y}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{17}=\underline{\underline{\frac{2}{17}=z}}$$

Para que el sistema sea compatible determinado, la segunda ecuación tiene que satisfacerse con los valores obtenidos para las incógnitas, o sea:

$$x+my+3z=3 \Rightarrow -\frac{13}{17}+\frac{12m}{17}+\frac{6}{17}=3 \;;;\; -13+12m+6=51 \;;;\; 12m=58 \;;;\; \underline{\underline{m=\frac{29}{6}}}$$

$$Conclusión:\ \underline{\underline{m=\frac{29}{6} \Rightarrow \quad Compatible\ \ Determinado \quad ;; \quad m\neq\frac{29}{6} \Rightarrow \quad Incompatible}}$$

Otra forma de resolver este problema es la siguiente: como el sistema tiene cuatro ecuaciones y sólo tres incógnitas, para que sea compatible es necesario que el determinante de la matriz ampliada sea cero, o sea:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & m & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - F_1\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & m-2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} m-2 & 0 & 2 \\ 1 & -6 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_1 \to F_1 - F_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} m-5 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \;;;\; 2 \cdot \begin{vmatrix} m-5 & 1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 0 \;;;\; -6(m-5) - 1 = 0 \;;;$$

$$6m - 30 + 1 = 0 \;;;\; 6m = 29 \;;;\; \underline{\underline{m = \frac{29}{6}}}$$

Como cabía esperar, se llega a la misma conclusión.

****

6º) Dada la función: $f(x)=\begin{cases} x\cdot Lx & si\ \ x>0 \\ 0 & si\ \ x=0 \end{cases}$, calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función y el eje OX, desde x = 0 hasta x = b, siendo b la abscisa del mínimo de la función.

El dominio de definición de la función es $D(f)\Rightarrow[0,\ \infty)$, y es continua en su dominio, por ser una constante o un producto de dos funciones continuas.

Los puntos de corte de la función con el eje X son los siguientes:

$$x\cdot L\,x=0\Rightarrow\begin{cases} x=0\ \rightarrow\ \underline{O(0,\ 0)} \\ x=1\ \rightarrow\ \underline{A(1,\ 0)} \end{cases}$$

Vamos a determinar ahora el mínimo de la función, para lo cual consideremos la función $f(x)=x\cdot L\,x$.

$$f'(x)=1\cdot L\,x+x\cdot\frac{1}{x}=L\,x+1\ \ ;;\ \ f'(x)=0\Rightarrow L\,x+1=0\ ;;\ L\,x=-1\ ;;\ \underline{x=e^{-1}}$$

$$f''(x)=\frac{1}{x}\ \ ;;\ \ f''(e^{-1})=\frac{1}{e^{-1}}=e>0\ \Rightarrow\ \underline{\textit{Mínimo}}$$

$$f(e^{-1})=e^{-1}\cdot L\,e^{-1}=\frac{1}{e}\cdot(-1)=-\frac{1}{e}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Mín\left(e^{-1},\ -e^{-1}\right)}}\ \ \Rightarrow\ \ \underline{\underline{b=e^{-1}}}$$

Como todas las ordenadas de la superficie que vamos a calcular son negativas, cambiamos los límites de integración:

$$A=\int_b^0 x\cdot L\,x\cdot dx\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l} Lx=u\rightarrow\frac{1}{x}\cdot dx=du \\ x\,dx=dv\rightarrow v=\frac{x^2}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow\ A=\left[L\,x\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\cdot dx\right]_{e^{-1}}^{0}=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\cdot L\,x-\frac{1}{2}\cdot\int x\cdot dx\right]_{e^{-1}}^{0}=\left[\frac{x^2}{2}\cdot L\,x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_{e^{-1}}^{0}=\left[\frac{x^2}{4}(2\,L\,x-1)\right]_{e^{-1}}^{0}=$$

$$=\left[\frac{0^2}{4}(2\,L\,0-1)\right]-\left[\frac{e^{-2}}{4}(2\,L\,e^{-1}-1)\right]=I-\left[\frac{1}{4e^2}(-2-1)\right]=\underline{I+\frac{3}{4e^2}=A}\ \ \ (*)$$

La expresión I es impropia, por lo tanto debemos proceder por límites, como se hace a continuación:

$$I = \lim_{x \to 0} \left[\frac{x^2}{4} (2 L x - 1) \right] = \frac{1}{4} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{2 L x - 1}{x^{-2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{-\infty}{\infty} \Rightarrow Indeterminado \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Aplicando \;\; L' Hopital \Rightarrow I = \frac{1}{4} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2}{x}}{-2x^{-3}} = -\frac{1}{4} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{-2}} = -\frac{1}{4} \cdot \lim_{x \to 0} x^2 = \underline{\underline{0 = I}}$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido para I, queda finalmente:

$$A = 0 + \frac{3}{4e^2} = \frac{3}{4e^2} \cong \underline{\underline{0'1015 \; u^2 = A}}$$

****

OPCIÓN A

1º) Utilizando las propiedades de los determinantes, resolver, sin calcular el determinante, la ecuación: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$.

2º) Calcular los valores de x e y para que el vector $\overrightarrow{u} = (x,\ y,\ 1)$ sea ortogonal a los vectores $\overrightarrow{v} = (3,\ 2,\ 0)$ y $\overrightarrow{w} = (2,\ 0,\ -1)$.

3º) Considerar la función $f : [0,\ 2\pi] \to R$ definida por $f(x) = x + 5 - 2\,sen\ x$. Hallar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos.

4º) Determinar el valor de a para el cual $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{a\,x} = e$.

****

(Resueltos en la Opción A)

5º) Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto P(2, -1, 1) y corta perpendicularmente a la recta $r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = z$.

En primer lugar determinamos un plano π que, siendo perpendicular a la recta r, pase por el punto P, para lo cual tendremos en cuenta que el vector director de la recta r es normal al plano π.

En paramétricas es: $r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 1 + 2k \\ z = k \end{cases}$. Un vector director de r es $\overrightarrow{v} = (2,\ 2,\ 1)$.

El plano π es de la forma: $\pi \equiv 2x + 2y + z + D = 0$. Como tiene que contener al punto P(2, -1, 1), tiene que ser:

$$2 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + D = 0 \ ;;\ 4 - 2 + 1 + D = 0 \ ;;\ D = -3 \ \Rightarrow\ \underline{\pi \equiv 2x + 2y + z - 3 = 0}$$

El punto Q de corte de r con π es:

$$2(2 + 2k) + 2(1 + 2k) + k - 3 = 0 \ ;;\ 4 + 4k + 2 + 4k + k - 3 = 0 \ ;;\ 9k = -3 \ ;;\ \underline{k = -\frac{1}{3}} \ \Rightarrow$$

$$x = 2 + 2k = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \ ;;\ y = 1 + 2k = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \ ;;\ z = -\frac{1}{3} \ \Rightarrow\ \underline{Q\left(\frac{4}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)}$$

La recta t pedida es la que pasa por P y tiene como vector director a $\overrightarrow{w}$, que es linealmente dependiente al que tiene como origen P y extremo Q:

$$\overrightarrow{w'} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = \left(\frac{4}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right) - (2,\ -1,\ 1) = \left(-\frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ -\frac{4}{3}\right) \Rightarrow \underline{\overrightarrow{w} = (1,\ -2,\ 2)}$$

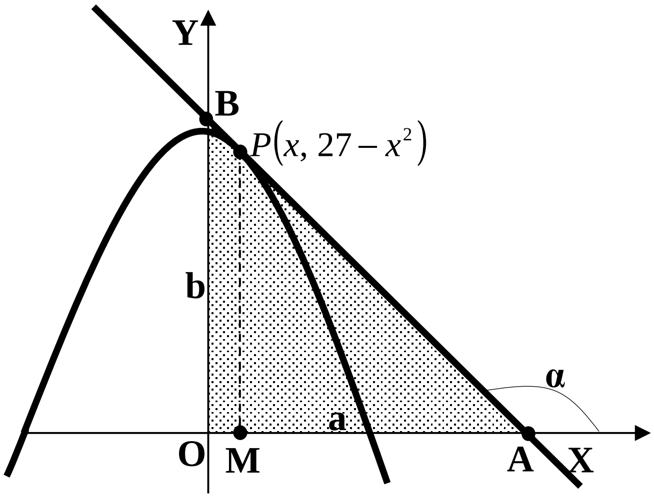
La recta r expresadas por unas ecuaciones continuas es:

$$\underline{\underline{t \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{2}}}$$

****

6º) Hallar el punto de la parábola $y = 27 - x^2$, situado en el primer cuadrante, tal que el triángulo determinado por la tangente a la parábola en ese punto y los ejes coordenados tenga área mínima? (Obtener el punto y el valor del área).

En primer lugar vamos a realizar un esquema aproximado de la situación.



Siendo a y b los segmentes que intercepta la tangente a la curva en el punto P, el área pedida es: $\underline{S = \dfrac{a \cdot b}{2}}$ (1)

Sabiendo que la derivada en un punto de una función es la tangente o pendiente:

$$\left.\begin{array}{l} y = 27 - x^2 \Rightarrow m = y' = -2x \\ m = tag\ \alpha = -\dfrac{b}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow -2x = -\frac{b}{a} \Rightarrow \underline{b = 2ax} \qquad (2)$$

Se trata de expresar los valores de a y b en función de x, para lo cual tendremos en cuenta que los triángulos OAB y MAP son semejantes, por lo que se puede establecer la siguiente relación:

$$\frac{b}{a} = \frac{27 - x^2}{a - x} \Rightarrow \frac{2ax}{a} = \frac{27 - x^2}{a - x}\ ;;\ a - x = \frac{27 - x^2}{2x}\ ;;\ a = \frac{27 - x^2}{2x} + x = \underline{\frac{27 + x^2}{2x} = a}$$

Sustituyendo en (2) queda: $b = 2ax = 2 \cdot \dfrac{27 + x^2}{2x} \cdot x = \underline{27 + x^2 = b}$

Sustituyendo, finalmente, en (1) los valores de a y de b:

$$S = \frac{\frac{27 + x^2}{2x} \cdot \left(27 + x^2\right)}{2} = \frac{\left(27 + x^2\right)^2}{4x} = \underline{\frac{1}{4} \cdot \frac{\left(27 + x^2\right)^2}{x} = S}$$

Para que el área sea mínima, su derivada tiene que ser nula:

$$S' = \frac{1}{4} \cdot \frac{\left[2 \cdot \left(27+x^2\right) \cdot 2x\right] \cdot x - \left(27+x^2\right)^2 \cdot 1}{x^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\left(27+x^2\right)\left(4x^2 - 27 - x^2\right)}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\left(27+x^2\right)\left(3x^2 - 27\right)}{x^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\left(27+x^2\right)\left(x^2 - 9\right)}{x^2} = \underline{\frac{3}{4} \cdot \frac{\left(27+x^2\right)(x+3)(x-3)}{x^2} = S'}$$

Los únicos valores que hacen que la derivada sea cero son 3 y -3, pero como el problema decía "en el primer cuadrante", la solución es x = 3.

<u>El punto pedido es P(3, 18)</u>

El valor del área se obtiene sustituyendo el valor de x por 3:

$$S = \frac{1}{4} \cdot \frac{\left(27+x^2\right)^2}{x} \;\Rightarrow\; x = 3 \;\Rightarrow S = \frac{1}{4} \cdot \frac{\left(27+3^2\right)^2}{3} = \frac{36^2}{12} = \frac{36 \cdot 36}{12} = 36 \cdot 3 = 108$$

<u>El área pedida es de 108 unidades cuadradas.</u>

****