PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

SEPTIEMBRE - 2003

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas.

PROPUESTA A

1º) Dados el plano $\pi \equiv 2mx + 6(m-1)y + (m+3)z + 2m + 4 = 0$ y la recta r que pasa por los puntos A(2, 0, -3) y B(3, 2, -2), determina m, si es posible, para que el plano y la recta sean ortogonales.

La recta r y el plano π son ortogonales cuando el vector director de la recta y el vector normal del plano sean linealmente dependientes (paralelos).

El vector director de r es $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3,\ 2,\ -2) - (2,\ 0,\ -3) = (1,\ 2,\ 1)$ y el vector normal del plano es $\overrightarrow{n} = (2m,\ 6m-6,\ m+3)$.

Para que los vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{n}$ sean linealmente dependientes tiene que cumplirse que:

$$\frac{2m}{1} = \frac{6m-6}{2} = \frac{m+3}{1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{2m}{1} = \frac{6m-6}{2} \Rightarrow 2m = 3m - 3 \ ;; \ m = 3 \\ \frac{2m}{1} = \frac{m+3}{1} \Rightarrow 2m = m + 3 \ ;; \ m = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{m = 3}$$

$$\underline{\underline{El \ \ plano \ \ \pi \ \ y \ \ la \ \ recta \ \ r \ \ son \ \ ortogonales \ \ para \ \ m = 3}}$$

****

2º) ¿Para qué valores de a y b tiene inversa la matriz $A=\begin{pmatrix} a+b & b \\ 2a & a+b \end{pmatrix}$? Calcula la matriz A^{-1} cuando existe.

Una matriz es inversible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} a+b & b \\ 2a & a+b \end{vmatrix}=(a+b)^2-2ab=a^2+2ab+b^2-2ab=a^2+b^2=0$$

$$\underline{\underline{La\ \ matriz\ \ A\ \ es\ \ inversible\ \ \forall a,\ b\in R,\ \{a^2+b^2\neq 0\}}}$$

La matriz inversa de A cuando se cumple que es inversible, es la siguiente:

$$A^t=\begin{pmatrix} a+b & 2a \\ b & a+b \end{pmatrix}\ ;;\ Adj.\ de\ A^t=\begin{pmatrix} a+b & -b \\ -2a & a+b \end{pmatrix}\ ;;\ A^{-1}=\frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \underline{\underline{A^{-1}=\frac{1}{a^2+b^2}\cdot\begin{pmatrix} a+b & -b \\ -2a & a+b \end{pmatrix}}}$$

****

3º) Estudia la derivabilidad en x = 0 de la función $f(x)=\begin{cases} sen\ x & si\ \ x>0 \\ x^2-x & si\ \ x\leq 0 \end{cases}$.

Por ser los dos trozos en que está dividida la función dos funciones continuas y derivables en sus dominios, que ambos son R, el estudio de su derivabilidad se limita al punto crítico, que es para x = 0.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, en principio estudiamos su continuidad.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} sen\ x = sen\ 0 = \underline{0} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} \left(x^2-x\right)=\underline{0}=\underline{f(0)} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)}$$

$$\underline{La\ \ función\ \ f(x)\ \ es\ \ continua\ \ para\ \ x=0}$$

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} \cos x & si\ \ x<0 \\ 2x-1 & si\ \ x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{cases} f'(0^-)=\cos 0=\underline{1} \\ f'(0^+)=2\cdot 0-1=\underline{-1} \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{f'(0^-)\neq f'(0^+)}$$

<u>La función no es derivable para x = 0</u>

****

4º) Calcula la siguiente integral definida: $I=\int \frac{x+4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

$$I=\int \frac{x+4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx+\int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx+4\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\underline{I_1+4I_2}\quad (*)$$

$$I_1=\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1-x^2=t \\ -2x\cdot dx=dt\ ;;\ dx=-\frac{1}{2}dt \end{array}\right\} \Rightarrow I_1=-\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt=-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=-t^{\frac{1}{2}}+C=-\sqrt{t}+C=\underline{-\sqrt{1-x^2}+C=I_1}$$

$$I_2=\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\underline{arc\ \ sen\ \ x+C=I_2}$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos por I_1 e I_2, resulta:

$$\underline{\underline{I=4\,arc\ sen\ x-\sqrt{1-x^2}+C}}$$

****

5º) Discute, según los valores de a, la posición relativa de los siguientes planos indicando las figuras que determinan (no es necesario resolverlo): $\begin{cases} \pi_1 \equiv (a+1)x + y + z = 3 \\ \pi_2 \equiv x + 2y + az = 4 \\ \pi_3 \equiv x + ay + 2z = 2a \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada que determinan los tres planos son:

$$M = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix} \;;;\; M' = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & a & 4 \\ 1 & a & 2 & 2a \end{pmatrix}$$

$$|\,M\,| = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 4(a+1) + a + a - 2 - a^2(a+1) - 2 = 4a + 4 + 2a - 4 - a^3 - a^2 =$$

$$= -a^3 - a^2 + 6a = 0 \;;;\; -a\left(a^2 + a - 6\right) = 0 \;;;\; \underline{a_1 = 0} \;;;\; a^2 + a - 6 = 0$$

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow \underline{a_2 = 2} \;;;\; \underline{a_3 = -3}$$

$$\underline{Para \;\; \begin{Bmatrix} a \neq 0 \\ a \neq 2 \\ a \neq -3 \end{Bmatrix} \;\; Rango\;\; M = Rango\;\; M' = 3 = n^o\;\; incóg. \Rightarrow Compatible\;\; Determinado}$$

Veamos el rango de M' para los valores que anulan el determinante de M:

Para a = 0 el sistema resulta $\begin{cases} \pi_1 \equiv x + y + z = 3 \\ \pi_2 \equiv x + 2y = 4 \\ \pi_3 \equiv x + 2z = 2a \end{cases}$. (No existen planos paralelos)

$$Para\;\; a = 0 \;\Rightarrow\; M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vamos a determinar el rango de M':

$$\{C_1,\; C_2,\; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0 \;\Rightarrow\; \underline{Rango\;\; M' = 3}$$

Para a = 2 el sistema resulta $\begin{cases} \pi_1 \equiv 3x + y + z = 3 \\ \pi_2 \equiv x + 2y + 2z = 4 \\ \pi_3 \equiv x + 2y + 2z = 4 \end{cases}$. (Los planos π_2 y π_3 son coincidentes)

$$Para \;\; a = 2 \;\Rightarrow\; M' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \underline{Rango \;\; M' = 2}.$$

$$\underline{Para \;\; a = 2 \;\Rightarrow\; Rango \;\; M = Rango \;\; M' = 2 < n^o \;\; incóg. \Rightarrow Compatible \;\; Indeterminado}$$

Para a = -3 el sistema resulta $\begin{cases} \pi_1 \equiv -2x + y + z = 3 \\ \pi_2 \equiv x + 2y - 2z = 4 \\ \pi_3 \equiv x - 2y + 2z = -4 \end{cases}$. (No existen planos paralelos)

$$Para \;\; a = -3 \;\Rightarrow\; M' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Vamos a determinar el rango de M':

$$\{C_1,\; C_2,\; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 16 - 6 + 4 - 6 - 16 + 4 = -4 \neq 0 \;\Rightarrow\; \underline{Rango \;\; M' = 3}$$

$$\underline{Para \;\; a = -3 \;\Rightarrow\; Rango \;\; M \neq Rango \;\; M' \;\Rightarrow\; Incompatible}$$

<u>Conclusión:</u>

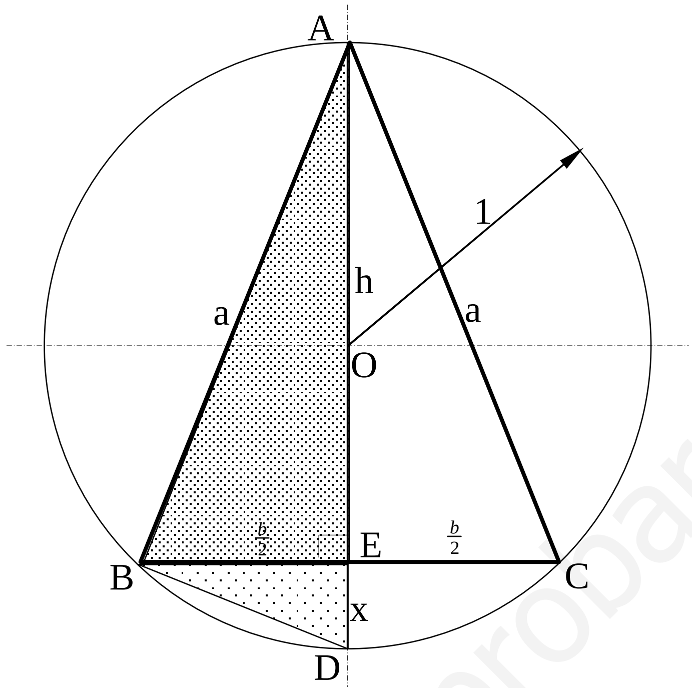
$$\underline{\underline{Para \;\; \begin{Bmatrix} a \neq 0 \\ a \neq 2 \\ a \neq -3 \end{Bmatrix} \;\; los \;\; planos \;\; \pi_1,\; \pi_2 \;\; y \;\; \pi_3 \;\; se \;\; cortan \;\; en \;\; un \;\; punto.}}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; \begin{Bmatrix} a = 0 \\ a = -3 \end{Bmatrix} \;\; los \;\; planos \;\; \pi_1,\; \pi_2 \;\; y \;\; \pi_3 \;\; se \;\; cortan \;\; dos \;\; a \;\; dos.}}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; a = 2 \;\; los \;\; planos \;\; \pi_1 \;\; y \;\; \pi_3 \;\; son \;\; coincidentes \;\; y \;\; secantes \;\; a \;\; \pi_2}}$$

****

6º) Calcula las dimensiones del triángulo isósceles, inscrito en una circunferencia de radio la unidad que tiene área máxima.



Los triángulos rectángulos ABE y BED son semejantes por lados perpendiculares, por lo cual se pueden establecer la siguiente relación:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{ED}} \Rightarrow \frac{h}{\frac{b}{2}} = \frac{\frac{b}{2}}{x} \Rightarrow \frac{b^2}{4} = hx \;;;\; \underline{h = \frac{b^2}{4x}} \quad (1)$$

De la observación de la figura se deduce que $x = 2 - h$.

Sustituyendo el valor de x en la expresión (1):

$$h = \frac{b^2}{4 \cdot (2-h)} \Rightarrow b^2 = 4h(2-h) \;;;\; \underline{b = 2\sqrt{h(2-h)}}. \quad (2)$$

El valor de la superficie del triángulo es $S = \frac{b \cdot h}{2}$, que tiene que ser máxima, por lo cual su derivada tiene que ser cero. Sustituyendo el valor de b de la expresión (2):

$$S = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2\sqrt{h(2-h)} \cdot h}{2} = \underline{\sqrt{h^3(2-h)} = S}$$

$$S' = \frac{3h^2(2-h) + h^3 \cdot (-1)}{2\sqrt{h^3(2-h)}} = \frac{6h^2 - 3h^3 - h^3}{2\sqrt{h^3(2-h)}} = \frac{6h^2 - 4h^3}{2\sqrt{h^3(2-h)}} = \frac{2h^2(3-2h)}{2\sqrt{h^3(2-h)}} = \underline{\frac{h^2(3-2h)}{\sqrt{h^3(2-h)}} = S'}$$

$$S'=0 \Rightarrow \frac{h^2(3-2h)}{\sqrt{h^3(2-h)}}=0\ ;;\ h^2(3-2h)=0\ ;;\ h_1=0\ ;;\ h_2=\frac{3}{2}=\underline{1'5\ \ unidades=h}$$

Vamos a justificar que se trata de un máximo para h = 1’5:

$$S'=\frac{3h^2-2h^3}{\sqrt{2h^3-h^4}} \ \Rightarrow\ S''=\frac{(6h-6h^2)\cdot\sqrt{2h^3-h^4}-(3h^2-2h^3)\cdot\frac{6h^2-4h^3}{2\sqrt{2h^3-h^4}}}{2h^3-h^4}=$$

$$=\frac{6h(1-h)\cdot\sqrt{h^3(2-h)}-h^2(3-2h)\cdot\frac{2h^2(3-4h)}{2\sqrt{h^3(2-h)}}}{h^3(2-h)}=$$

$$=\frac{\frac{6h(1-h)\cdot h^3(2-h)-h^4(3-2h)(3-4h)}{\sqrt{h^3(2-h)}}}{h^3(2-h)}=\frac{6h^4(1-h)(2-h)-h^4(3-2h)(3-4h)}{h^3(2-h)h\sqrt{h(2-h)}}=$$

$$=\frac{6(1-h)(2-h)-(3-2h)(3-4h)}{(2-h)\sqrt{h(2-h)}}=\frac{6(2-h-2h+h^2)-(9-12h-6h+8h^2)}{(2-h)\sqrt{h(2-h)}}=$$

$$=\frac{12-18h+6h^2-9+18h-8h^2}{(2-h)\sqrt{h(2-h)}}=\underline{\frac{3-2h^2}{(2-h)\sqrt{h(2-h)}}=S''}$$

$$S''\left(\tfrac{3}{2}\right)=\frac{3-2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2}{\left(2-\frac{3}{2}\right)\sqrt{\frac{3}{2}\cdot\left(2-\frac{3}{2}\right)}}=\frac{3-2\cdot\frac{9}{4}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}}=\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{6}{\sqrt{3}}=\underline{-\frac{2\sqrt{3}}{3}<0\Rightarrow Máx.,\ \ c.q.d.}$$

Sustituyendo el valor de h en la expresión (2) se obtiene el valor de b:

$$b=2\sqrt{h(2-h)}=2\sqrt{\frac{3}{2}\cdot\left(2-\frac{3}{2}\right)}=2\sqrt{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}=2\sqrt{\frac{3}{4}}=\underline{\underline{\sqrt{3}\ \ unidades=b}}$$

Del triángulo rectángulo ABE y mediante el teorema de Pitágoras:

$$a^2=h^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{9}{4}+\frac{3}{4}=\frac{12}{4}=3\ ;;\ \underline{\underline{a=\sqrt{3}\ unidades}}$$

$\underline{\underline{Se\ \ trata\ \ de\ \ un\ \ triángulo\ \ isósceles-equilátero\ \ de\ \ lado\ \ \sqrt{3}\ \ unidades}}$.

****

PROPUESTA B

1º) Dados el plano $\pi \equiv 2mx+6(m-1)y+(m+3)z+2m+4=0$ y la recta r que pasa por los puntos A(2, 0, -3) y B(3, 2, -2), determina m, si es posible, para que el plano y la recta sean ortogonales.

2º) ¿Para qué valores de a y b tiene inversa la matriz $A=\begin{pmatrix} a+b & b \\ 2a & a+b \end{pmatrix}$? Calcula la matriz A^{-1} cuando existe.

3º) Estudia la derivabilidad en x = 0 de la función $f(x)=\begin{cases} sen\ x & si\ \ x>0 \\ x^2-x & si\ \ x\le 0 \end{cases}$.

4º) Calcula la siguiente integral definida: $I=\int \frac{x+4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

(Resueltos en la propuesta A)

****

5º) Halla la ecuación del plano π que pasa por el punto A(1, 1, 2) y es paralelo a las rectas $r\equiv\begin{cases} x=2-t \\ y=t \\ z=-1+2t \end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases} 2x-y+z=-2 \\ -x+y+3z=1 \end{cases}$.

La expresión de la recta s por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$s\equiv\begin{cases} 2x-y+z=-2 \\ -x+y+3z=1 \end{cases} \rightarrow \underline{z=\lambda}\ ;;\ \left.\begin{matrix} 2x-y=-2-\lambda \\ -x+y=1-3\lambda \end{matrix}\right\} \rightarrow \underline{x=-1-4\lambda}\ ;;$$

$$\left.\begin{matrix} 2x-y=-2-\lambda \\ -2x+2y=2-6\lambda \end{matrix}\right\} \rightarrow \underline{y=-7\lambda} \Rightarrow \underline{s\equiv\begin{cases} x=-1-4\lambda \\ y=-7\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}$$

Un vector director de las rectas r y s son $\overrightarrow{u}=(-1,\ 1,\ 2)$ y $\overrightarrow{v}=(-4,\ -7,\ 1)$, respectivamente.

El plano π se puede determinar por el punto A y los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$:

$$\pi(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & -7 & 1 \end{vmatrix}=0\ ;;$$

$$(x-1)-8(y-1)+7(z-2)+4(z-2)+14(x-1)+(y-1)=0 \;\; ;;$$

$$15(x-1)-7(y-1)+11(z-2)=0 \;\; ;; \;\; 15x-15-7y+7+11z-22=0 \;\; ;;$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 15x-7y+11z-30=0}}$$

****

6º) a) Representa gráficamente la curva $y = \frac{x}{x^2+4}$. Para ello calcula asíntotas, puntos críticos e intervalos de crecimiento.

b) Calcula el área del recinto limitado por la curva anterior y las rectas x = a y x = b, donde a y b son las abscisas de los puntos donde la curva alcanza su mínimo y máximo.

----

a)

Se trata de una función racional cuyo dominio es R, por no existir valores reales de x que anulan el denominador.

Es simétrica con respecto al origen por ser $f(-x) = -f(x)$.

Las asíntotas son las siguientes:

<u>Horizontales:</u>

Son los valores finitos de f(x) cuando x tiende a $\pm\infty$:

$$y = k \Rightarrow y = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2+1} = \underline{\underline{0 = y}} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \underline{\underline{0^+}} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \underline{\underline{0^-}} \end{cases}$$

La solución de este apartado es lógica si tenemos en cuenta que la función es simétrica con respecto al origen de coordenadas.

<u>Verticales:</u>

Son los valores finitos que anulan el denominador: <u>no tiene</u>.

<u>Oblicuas:</u>

Para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador.

En el caso que nos ocupa: <u>no tiene.</u>

Los máximos y mínimos relativos de la función son los siguientes:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \underline{\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = f'(x)}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 1-x^2=0 \;\;;;\;\; (1+x)(1-x)=0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1=1} \\ \\ \underline{x_2=-1} \end{cases}$$

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot\left(x^2+1\right)^2-\left(1-x^2\right)\cdot 2\cdot\left(x^2+1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{-2x\cdot\left(x^2+1\right)-4x\cdot\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}=$$

$$=\frac{-2x^3-2x-4x+4x^3}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{2x^3-6x}{\left(x^2+1\right)^3}=\underline{\frac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}=f''(x)}$$

$$f''(1)=\frac{2\cdot(1-3)}{(1+1)^3}=\frac{-4}{8}<0 \;\Rightarrow\; \underline{\textit{Máximo}} \;\Rightarrow\; f(1)=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{P\left(1,\ \frac{1}{2}\right)}}$$

$$f''(-1)=\frac{-2\cdot(1-3)}{(1+1)^3}=\frac{4}{8}>0 \;\Rightarrow\; \underline{\textit{Mínimo}} \;\Rightarrow\; f(-1)=-\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Q\left(-1,\ -\frac{1}{2}\right)}}$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow \frac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}=0 \Rightarrow 2x\left(x^2-3\right)=0 \;\Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1=0} \\ \underline{x_2=\sqrt{3}} \\ \underline{x_3=-\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$f'''(x)=\frac{\left(6x^2-6\right)\left(x^2+1\right)^3-\left(2x^3-6x\right)\cdot 3\left(x^2+1\right)^2\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^6}=\frac{\left(6x^2-6\right)\left(x^2+1\right)-6x\left(2x^3-6x\right)}{\left(x^2+1\right)^4}=$$

$$=\frac{6x^4+6x^2-6x^2-6-12x^4+36x^2}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{-6x^4+36x^2-6}{\left(x^2+1\right)^4}=\underline{\frac{-6\left(x^4-6x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^4}=f'''(x)}$$

$$f'''(0)=\frac{-6}{2}\neq 0 \Rightarrow P.\ \textit{Inflexión} \;\;;;\;\; f(0)=0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{O(0,\ 0)}}$$

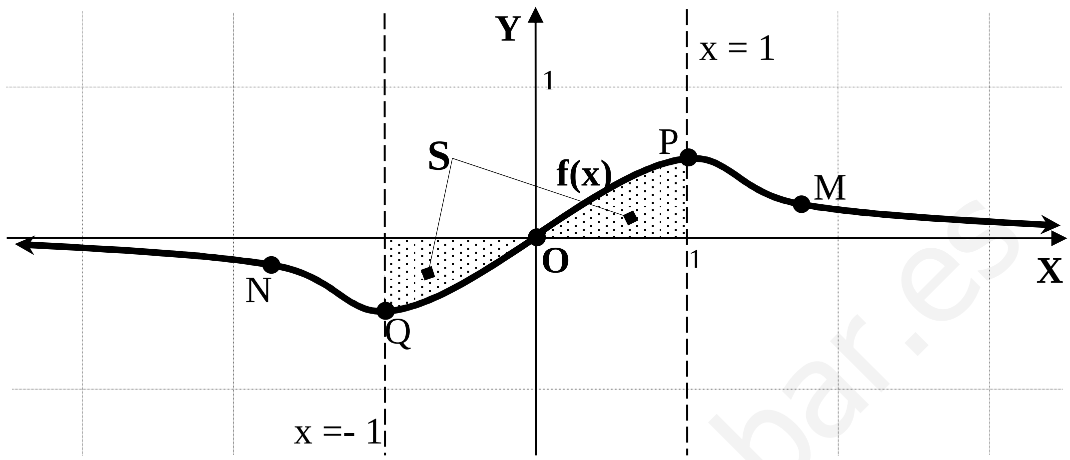
$$f'''\left(\sqrt{3}\right)=\frac{-6(9-18+1)}{16}\neq 0 \Rightarrow P.\ \textit{Inflexión} \;\;;;\;\; f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{M\left(\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}}$$

$$f'''\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{-6(9-18+1)}{16}\neq 0 \Rightarrow P.\ \textit{Inflexión} \;\;;;\;\; f\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{4} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{N\left(-\sqrt{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)}}$$

Teniendo en cuenta que se trata de una función continua y los valores del máximo y mínimo, los intervalos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2} \Rightarrow \begin{cases} |x|>1 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow \underline{\underline{Decreciente:\ (-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty)}} \\ |x|<1 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow \underline{\underline{Creciente:\ (-1,\ 1)}} \end{cases}$$

La representación gráfica de la función es, aproximadamente, la siguiente:



b)

Teniendo en cuenta la simetría de la función y de la observación de la gráfica se deduce que el área pedida es la siguiente:

$$S = 2\cdot\int_0^1 f(x)\cdot dx = 2\cdot\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2+1=t \\ x\,dx=\frac{1}{2}dt \end{array} \middle\| \begin{array}{l} x=1\to t=2 \\ x=0\to t=1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} = [L\,t]_1^2 = L\,2 - L\,1 = \underline{\underline{L\,2 \cong 0'69\ u^2 = S}}$$

****