PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JUNIO – 2004

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas.

OPCIÓN A

1º) Una recta r pasa por el punto P(1, -1, 0) y es paralela a los planos $\pi_1 \equiv x + y = 1$ y $\pi_2 \equiv x + z = 1$. Hallar su ecuación.

La recta r pedida es la intersección de los planos π' y π'_2, paralelos a π_1 y π_2, respectivamente, que pasen por el punto P:

$$\pi'_1 \;\Rightarrow\; \left.\begin{cases} P(1,\ -1,\ 0) \\ \pi_1 \equiv x + y - 1 = 0 \end{cases}\right\} \;\Rightarrow\; \pi'_1 \equiv x + y + D_1 = 0 \;;;\; 1 - 1 + D_1 = 0 \;;;\; D_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\pi'_1 \equiv x + y = 0}$$

$$\pi'_2 \;\Rightarrow\; \left.\begin{cases} P(1,\ -1,\ 0) \\ \pi_2 \equiv x + z - 1 = 0 \end{cases}\right\} \;\Rightarrow\; \pi'_2 \equiv x + z + D_2 = 0 \;;;\; 1 + 0 + D_2 = 0 \;;;\; D_2 = -1 \Rightarrow$$

$$\underline{\pi'_2 \equiv x + z - 1 = 0}$$

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases}}}$$

Nota: Obsérvese que el plano π_2 y π'_2 son coincidentes.

****

2º) De una función $f:(0,\ 2\pi)\rightarrow R$, se sabe que $f'(x)=\frac{\cos x}{-x}$. Obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de f.

Una función es creciente en un punto cuando su derivada es positiva en ese punto y decreciente cuando su derivada es negativa en ese punto.

Para determinar el signo de la derivada tendremos en cuenta que el valor de x en el intervalo dado es siempre positiva, por lo tanto, teniendo en cuenta el signo menos del denominador, será:

$$f'(x)>0\Rightarrow \cos x<0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{x\in\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)\Rightarrow\ Creciente}}$$

$$f'(x)>0\Rightarrow \cos x<0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)\Rightarrow\ Decreciente}}$$

Para que exista un máximo o un mínimo relativo es necesario que se anule la primera derivada. En el intervalo dado se anula la derivada para:

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{\cos x}{-x}=0\ \Rightarrow\ \cos x=0\ \Rightarrow\left\{x_1=\frac{\pi}{2}\ ;;\ x_2=\frac{3\pi}{2}\right\}$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos recurrimos a la segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{-sen\ x\cdot(-x)-\cos x\cdot(-1)}{(-x)^2}=\underline{\frac{\cos x+x\,sen\ x}{x^2}=f''(x)}$$

$$f''\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=\frac{\cos\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\cdot sen\frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}=\frac{0+\frac{\pi}{2}\cdot 1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}=\frac{2}{\pi}>0\ \Rightarrow\ \underline{Mínimo}$$

$$f\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{-\frac{\pi}{2}}=\frac{0}{-\frac{\pi}{2}}=0\ \ \Rightarrow\ \ \underline{\underline{Mínimo\ \left(\tfrac{\pi}{2},\ 0\right)}}$$

$$f''\left(\tfrac{3\pi}{2}\right)=\frac{\cos\frac{3\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}\cdot sen\frac{3\pi}{2}}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2}=\frac{0+\frac{\pi}{2}\cdot(-1)}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2}=-\frac{2}{3\pi}<0\ \Rightarrow\ \underline{Máximo}$$

$$f\left(\tfrac{3\pi}{2}\right)=\frac{\cos\frac{3\pi}{2}}{-\frac{3\pi}{2}}=\frac{0}{-\frac{3\pi}{2}}=0\ \ \Rightarrow\ \ \underline{\underline{Máximo\ \left(\tfrac{3\pi}{2},\ 0\right)}}$$

****

3º) Calcular la integral indefinida: $\int \frac{dx}{(x-1)^2}$.

$$I = \int \frac{dx}{(x-1)^2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-1=t \\ dx = dt \end{array} \right\} \Rightarrow I = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2} \cdot dt = \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{t} + C = \underline{\underline{-\frac{1}{x-1} + C = I}}$$

****

4º) Hallar el valor que deben tomas los valores a, b y c para que la curva de ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$ pase por los puntos A(1, 4), B(2, 9) y C(-3, 24).

$$A(1,\ 4) \Rightarrow\ f(1) = 4 \Rightarrow\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 4\ ;;\ \underline{a + b + c = 4} \qquad (1)$$

$$B(2,\ 9) \Rightarrow\ f(2) = 9 \Rightarrow\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 9\ ;;\ \underline{4a + 2b + c = 9} \qquad (2)$$

$$C(-3,\ 24) \Rightarrow\ f(-3) = 24 \Rightarrow\ a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c = 24\ ;;\ \underline{9a - 3b + c = 24} \qquad (3)$$

Con las ecuaciones (1), (2) y (3) se forma el sistema: $\left.\begin{array}{r} a + b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = 9 \\ 9a - 3b + c = 24 \end{array}\right\}$

Resolviendo por Cramer: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 12 + 9 - 18 + 3 - 4 = -20$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 1 \\ 24 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{-20} = \frac{8 - 27 + 24 - 48 + 12 - 9}{-20} = \frac{44 - 84}{-20} = \frac{-40}{-20} = \underline{\underline{2 = a}}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \\ 9 & 24 & 1 \end{vmatrix}}{-20} = \frac{9 + 96 + 36 - 81 - 24 - 16}{-20} = \frac{141 - 121}{-20} = \frac{20}{-20} = \underline{\underline{-1 = b}}$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 9 \\ 9 & -3 & 24 \end{vmatrix}}{-20} = \frac{48 - 48 + 81 - 72 + 27 - 96}{-20} = \frac{108 - 168}{-20} = \frac{-60}{-20} = \underline{\underline{3 = c}}$$

****

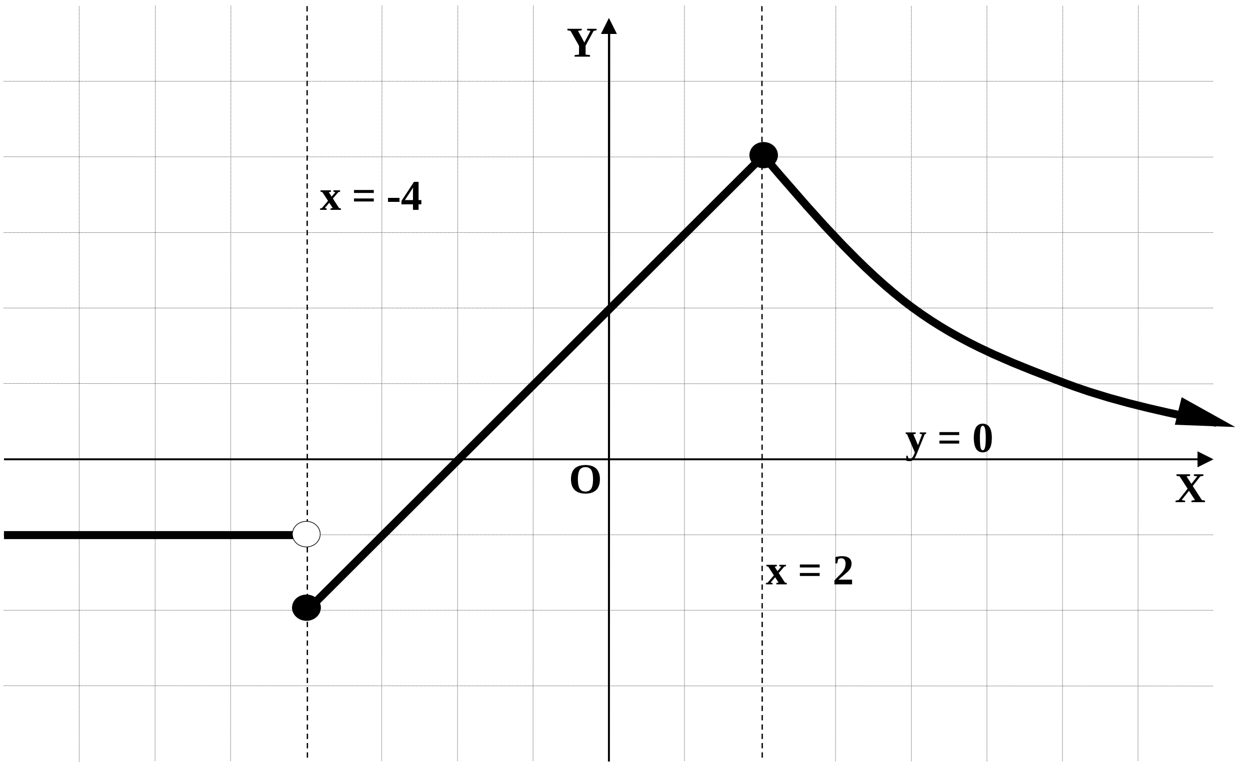
5º) Se considera la función $f : R \to R$ definida por $f(x) = \begin{cases} -1 & si\ \ x < -4 \\ x+2 & si\ \ -4 \le x < 2 \\ \frac{8}{x} & si\ \ 2 \le x \end{cases}$ se pide:

a) Representar gráficamente la función.

b) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f(x).

----

a)



b)

Para que una función sea continua en un punto es necesario que esté definida en ese punto y que los límites laterales existan y sean iguales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -4} (-1) = \underline{-1} \\ \lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -4} (x+2) = \underline{-2} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{\lim\limits_{x \to -4^-} f(x) \ne \lim\limits_{x \to -4^+} f(x)}}$$

La función es discontinua en x = -4.

Como para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, f(x) no es derivable para x = -4.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = f(2) = \lim\limits_{x \to 2} (x+2) = \underline{4} \\ \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{8}{x} = \underline{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = f(2) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)}}$$

<u>La función es continua en x = 2.</u>

Para que una función sea derivable en un punto es necesario que sea continua en ese punto y además que existan sus derivadas laterales y que sean iguales:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si \;\; x < -4 \\ x+2 & si \;\; -4 \le x < 2 \\ \frac{8}{x} & si \;\; 2 \le x \end{cases} \Rightarrow \;\; x = 2 \;\; \Rightarrow \begin{cases} f'(x^-) = 1 \;\; \Rightarrow \;\; f'(2^+) = \underline{\underline{1}} \\ \\ f'(x^+) = -\frac{8}{x^2} \;\; \Rightarrow \;\; f'(2^+) = -\frac{8}{4} = \underline{\underline{-2}} \end{cases}$$

$f'(2^-) \neq f'(2^+) \Rightarrow$ <u>La función no es derivable para x = 2.</u>

****

OPCIÓN B

1º) Una recta pasa por el punto P(1, -1, 0) y es paralela a los planos $\pi_1 \equiv x + y = 1$ y $\pi_2 \equiv x + z = 1$. Hallar su ecuación.

2º) De una función $f : (0,\ 2\pi) \rightarrow R$, se sabe que $f'(x) = \frac{\cos x}{-x}$. Obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de f.

3º) Calcular la integral indefinida: $\int \frac{dx}{(x-1)^2}$.

(Resueltos en la opción A)

****

4º) Dada la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{3}$ y el plano $\pi \equiv x + 3y - 3z = 3$, calcular:

a) El plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.

b) El volumen del tetraedro determinado por el plano π y los planos coordenados.

----

a)

El plano π' tiene como vectores directores al director de r: $\overrightarrow{v_r} = (2,\ 1,\ -3)$ y al normal al plano π: $\overrightarrow{n} = (1,\ 3,\ -3)$ y contiene al punto $P \in r$: P(0, 1, -1):

$$\pi'\left(P;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{n}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z+1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ 3x + 6(z+1) + 3(y-1) + (z+1) - 9x + 6(y-1) = 0$$

$$-6x + 9(y-1) + 7(z+1) = 0 \ ;;\ -6x + 9y - 9 + 7z + 7 = 0 \ ;;\ \underline{\underline{\pi' \equiv 6x - 9y - 7z + 5z + 2 = 0}}$$

b)

Los puntos de intersección del plano π con los ejes coordenados son los siguientes:

$$\pi \equiv x + 3y - 3z = 3 \ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Eje\ \ X \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{A(3,\ 0,\ 0)} \\ \\ je\ \ Y \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{B(0,\ 1,\ 0)} \\ \\ Eje\ \ Z \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{C(0,\ 0,\ -1)} \end{array} \right.$$

Los vectores que determinan el tetraedro son:

$$\overrightarrow{OA}=(3,\ 0,\ 0)\ ;;\ \overrightarrow{OB}=(0,\ 1,\ 0)\ ;;\ \overrightarrow{OC}=(0,\ 0,\ -1)$$

Sabiendo que el volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los mismos, en valor absoluto, será:

$$V=\frac{1}{6}\cdot\left|\left[\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}\right]\right|=\frac{1}{6}\cdot\left|\begin{vmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\cdot|-3|=\underline{\underline{\frac{1}{2}\,u^3=V}}$$

****

5º) Hallar los extremos relativos de la función $f(x)=x^4-2x^2+2$. Calcular también los extremos absolutos de dicha función en el intervalo (-2, 2).

$$f'(x)=4x^3-4x=4x(x^2-1)\ ;;\ f'(x)=0\ \Rightarrow\ 4x(x^2-1)=0\ \Rightarrow\ \begin{cases}\underline{x_1=0}\\ \underline{x_2=1}\\ \underline{x_3=-1}\end{cases}$$

$$f''(x)=12x^2-4\ \Rightarrow\ \begin{cases}f''(0)=-4<0\ \Rightarrow\ Máximo\\ f''(1)=12-4=8>0\ \Rightarrow\ Mínimo\\ f''(-1)=12-4=8>0\ \Rightarrow\ Mínimo\end{cases}$$

$$f(0)=2\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Máximo\ \Rightarrow\ A(0,\ 2)}}$$

$$f(1)=f(-1)=1^4-2\cdot 1^2+2=1-2+2=1\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Mínimos\ \Rightarrow\ B(1,\ 1)\ y\ C(-1,\ 1)}}$$

$$f''(x)=0\ \Rightarrow\ 12x^2-4=0\ ;;\ 4(3x^2-1)=0\ \ 3x^2=1\ ;;\ x^2=\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ \begin{cases}\underline{x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}}\\ \underline{x_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}}\end{cases}$$

$$f'''(x)=24x\ \Rightarrow\ \begin{cases}f'''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=24\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\neq 0\ \Rightarrow\ Punto\ de\ inflexión\ para\ x=\frac{\sqrt{3}}{3}\\ f'''\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-24\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\neq 0\ \Rightarrow\ Punto\ de\ inflexión\ para\ x=-\frac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4-2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+2=\frac{1}{9}-\frac{1}{3}+2=\frac{1-3+18}{9}=\frac{16}{9}\ \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\Rightarrow\ P.I.\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{16}{9}\right)\ y\ P.I.\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{16}{9}\right)}}$$

La función es simétrica, por ser par, o sea: f(x) = f(-x), por tanto los máximos y mínimos absolutos en el intervalo (-2, 2) serán:

$$f(2)=f(-2)=2^4-2\cdot 2^2+2=16-8+2=10\Rightarrow \underline{\underline{Máximos\ abs.:P(-2,\ 10)\ y\ Q(2,\ 10)}}$$

Los mínimos relativos resultan ser también absolutos.

****