PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JUNIO – 2005

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas.

OPCIÓN A

1º) Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{-1}$ con el plano $\pi \equiv 2x - y + z - 1 = 0$.

Este problema puede resolverse de diversas formas.

Primera:

Expresando la recta r por unas ecuaciones paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$, un punto genérico de la recta r es $P(1+\lambda,\ 1,\ 1-\lambda)$.

Si el punto P es el punto de corte de la recta r con el plano π tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x - y + z - 1 = 0 \\ P(1+\lambda,\ 1,\ 1-\lambda) \end{array}\right\} \Rightarrow 2(1+\lambda) - 1 + (1-\lambda) - 1 = 0 \ ;;\ 2 + 2\lambda - 1 + 1 - \lambda - 1 = 0 \ ;;\ \underline{\lambda = -1}$$

$$\underline{\underline{P(0,\ 1,\ 2)}}$$

Segunda:

Expresando la recta r por unas ecuaciones implícitas: $r \equiv \begin{cases} y-1=0 \\ -x+1=z-1 \end{cases}$ o mejor: $\underline{r \equiv \begin{cases} y-1=0 \\ x+z=2 \end{cases}}$.

El punto P es la solución del sistema de tres ecuaciones que determinan el plano y la recta:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-y+z=1 \\ \underline{y=1} \\ x+z=2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow z=1-2x+y=1-2x+1=2-2x \\ \\ \rightarrow z=2-x \end{array} \Rightarrow 2-2x=2-x \;;;\; \underline{x=0} \;;;\; \underline{z=2}$$

$$\underline{\underline{P(0,\ 1,\ 2)}}$$

****

2º) Determinar el dominio de la función $f(x) = x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

El dominio será el conjunto de valores reales que hacen $\frac{x+1}{x-1} \geq 0$, con la excepción de x = 1 que anula el denominador.

$\frac{x+1}{x-1} \geq 0$;; $x+1 \geq 0$;; $\underline{x \geq -1}$

$$\underline{\underline{D(f) \Rightarrow (-1,\ 1) \cup (1,\ +\infty)}}$$

****

3º) Calcular $\lim_{x \to 3} \frac{\cos(\pi x)}{x}$.

$$\lim_{x \to 3} \frac{\cos(\pi x)}{x} = \frac{\cos(3\pi)}{3} = \frac{\cos 540^{\circ}}{3} = \frac{\cos 180^{\circ}}{3} = \underline{\underline{\frac{-1}{3}}}$$

****

4º) Sea la función $F(x)=\int_1^x \frac{sen\ t}{t}\cdot dt$ definida para $x\geq 1$. Hallar sus máximos y mínimos relativos.

5º) Sean las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x-2y-1=0 \\ y-z-2=0 \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ -2y+2z-\alpha=0 \end{cases}$, determinar el valor de α para que las rectas sean coplanarias.

Nota general: Las funciones trigonométricas estás expresadas en radianes.

Para hallar, en primer lugar, un vector director y un punto de cada una de las rectas, las expresamos mediante ecuaciones paramétricas:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x-2y-1=0 \\ y-z-2=0 \end{cases} \rightarrow \underline{z=\lambda} \;\;;;\;\; \underline{y=2+\lambda} \;\;;;\;\; x=2y+1=4+2\lambda+1=\underline{5+2\lambda=x} \;\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \;\; \underline{r_1 \equiv \begin{cases} x=5+2\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}} \;\;\Rightarrow\;\; \begin{cases} Vector\;\; director:\;\; \underline{\overrightarrow{v_1}=(2,\;1,\;1)} \\ \\ Punto:\;\; \underline{A(5,\;2,\;0)} \end{cases}$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ -2y+2z-\alpha=0 \end{cases} \rightarrow \underline{z=\mu} \rightarrow \underline{y=-\frac{\alpha}{2}+\mu} \;\;;;\;\; x=-y-\mu+1=\frac{\alpha}{2}-\mu-\mu+1=$$

$$=\underline{\frac{\alpha+2}{2}-2\mu=x} \;\;\Rightarrow\;\; \underline{r_2 \equiv \begin{cases} x=\dfrac{\alpha+2}{2}-2\mu \\ y=-\dfrac{\alpha}{2}+\mu \\ z=\mu \end{cases}} \;\;\Rightarrow\;\; \begin{cases} Vector\;\; director:\;\; \underline{\overrightarrow{v_2}=(-2,\;1,\;1)} \\ \\ Punto:\;\; \underline{B\left(\dfrac{\alpha+2}{2},\;-\dfrac{\alpha}{2},\;0\right)} \end{cases}$$

Para que las rectas sean coplanarias los vectores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ y $\overrightarrow{w}$ tienen que tener de rango dos, es decir, que los tres estén contenidos en un mismo plano, siendo $\overrightarrow{w}$ un vector linealmente dependiente de $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB}=B-A=\left(\frac{\alpha+2}{2},\;-\frac{\alpha}{2},\;0\right)-(5,\;2,\;0)=\left(\frac{\alpha-8}{2},\;-\frac{\alpha+4}{2},\;0\right) \Rightarrow \underline{\overrightarrow{w}=(\alpha-8,\;-\alpha-4,\;0)}$$

$$Rango\;\left\{\overrightarrow{v_1},\;\overrightarrow{v_2}\;\;y\;\;\overrightarrow{w}\right\}=2 \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ \alpha-8 & -\alpha-4 & 0 \end{vmatrix}=0 \;\;;;$$

$$(\alpha-8)+2(\alpha+4)-(\alpha-8)+2(\alpha+4)=0 \;\;;;\;\; 4(\alpha+4)=0 \;\;;;\;\; \alpha+4=0$$

$$\underline{\underline{\alpha=-4}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{-1}$ con el plano $\pi \equiv 2x - y + z - 1 = 0$.

(Resuelto en la opción A)

2º) Determinar el dominio de la función $f(x) = x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

(Resuelto en la opción A)

3º) Calcular $\lim_{x \to 3} \frac{\cos(\pi x)}{x}$.

(Resuelto en la opción A)

4º) Evaluar el área comprendida entre las funciones $f(x) = 2x^2 - 1$ y $g(x) = x$. Representar gráficamente la situación.

Los puntos de corte de las funciones son:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x^2 - 1 = x \;;;\; 2x^2 - x - 1 = 0 \;;;$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow \underline{A(1,\ 1)} \\ x_2 = -\frac{1}{2} \rightarrow \underline{B\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)} \end{cases}$$

Los puntos de corte de f(x) con los ejes son:

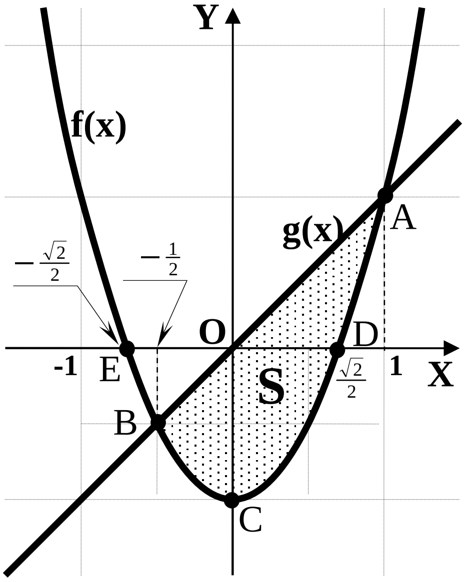
$$Eje\ \ Y \rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -1 \;;;\; \underline{C(0,\ -1)}$$

$$Eje\ \ X \rightarrow y = 0 \Rightarrow 2x^2 - 1 = 0 \;;;\; x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \underline{D\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)} \\ x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \underline{E\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)} \end{cases}$$

Vamos a determinar el mínimo de la función (se trata de una parábola convexa por tener el coeficiente de x^2 positivo):

$$f'(x) = 4x = 0 \Rightarrow x = 0$$ El punto mínimo es C(-1, 0).

Con los datos anteriores, la gráfica aproximada de la situación es la siguiente:



Teniendo en cuenta que todas las ordenadas de la recta son iguales o mayores que las de la parábola en el intervalo del recinto que determinan, el área S que tenemos que calcular es la siguente.

$$S = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left[x - \left(2x^2 - 1\right)\right] \cdot dx =$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left(x - 2x^2 + 1\right) \cdot dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left(-2x^2 + x + 1\right) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_{-\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1\right) - \left[-\frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1 - \left(-\frac{-\frac{1}{4}}{3} + \frac{\frac{1}{4}}{2} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = 2 - \frac{2}{3} - \frac{1}{12} - \frac{1}{8} = \frac{48 - 16 - 2 - 3}{24} = \frac{48 - 21}{24} = \frac{27}{24} = \underline{\underline{\frac{9}{8}\,u^2 = S}}$$

****

5º) Discutir, según los valores del parámetro α, el sistema $\begin{cases} x+y+z=\alpha \\ x+(1+\alpha)y+z=2\alpha \\ x+y+(1+\alpha)z=0 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1+\alpha \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1+\alpha & 1 & 2\alpha \\ 1 & 1 & 1+\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1+\alpha \end{vmatrix}=(1+\alpha)^2+1+1-(1+\alpha)-1-(1+\alpha)=(1+\alpha)^2-2(1+\alpha)+1=$$

$$=1+2\alpha+\alpha^2-2-2\alpha+1=\alpha^2=0 \Rightarrow \underline{\alpha=0}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ \alpha\neq 1 \Rightarrow Rango\,M=Rango\ M'=3=n^o\ Incóg. \Rightarrow Compatible\ \ Deter\min ado}}$$

Para $\alpha=0$ resulta $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\underline{\underline{Para\ \ \alpha=0 \Rightarrow Rango\,M=Rango\ M'=1<n^o\ Incóg. \Rightarrow Compatible\ \ In\det er\min ado}}$$

Para $\alpha=0$ el sistema se transforma en la ecuación $x+y+z=0$, cuyas soluciones son todos los infinitos puntos del plano que determina. Se trata, pues, de una indeterminación con dos grados de libertad por lo que debemos utilizar dos parámetros.

Haciendo $\left.\begin{matrix} y=\alpha \\ \underline{z=\beta} \end{matrix}\right\} \rightarrow \underline{x=-\alpha-\beta} \Rightarrow \underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=-\alpha-\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases},\ \forall\alpha,\ \beta\in R}}$

Dando valores a α y β se obtienen las infinitas soluciones, por ejemplo:

$$\underline{\underline{\left.\begin{matrix} \alpha=0 \\ \beta=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}}} \;;;\; \underline{\underline{\left.\begin{matrix} \alpha=1 \\ \beta=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}}} \;;;\; \underline{\underline{\left.\begin{matrix} \alpha=7 \\ \beta=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=-6 \\ y=7 \\ z=-1 \end{cases}}} \;\cdots\cdots$$

****