PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

SEPTIEMBRE – 2008

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

PROPUESTA A

1º) Sea la recta $r \equiv \begin{cases} 2x+3y-5z-21=0 \\ x+y-z-8=0 \end{cases}$. Buscad un punto y un vector direccional de r, y calculad sus ecuaciones en forma paramétricas y en forma continua.

Parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo $z=\lambda$, resulta:

$$r \equiv \begin{cases} 2x+3y=21+5\lambda \\ x+y=8+\lambda \end{cases} \;;\; \left.\begin{array}{r} 2x+3y=21+5\lambda \\ -2x-2y=-16-2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{y=5+4\lambda} \;;\;$$

$$x=8+\lambda-y=8+\lambda-5-4\lambda=\underline{3-3\lambda=x}$$

Una expresión de r en forma de paramétricas es: $\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x=3-3\lambda \\ y=5+4\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}}$.

Una expresión de r en ecuaciones continuas es: $\underline{\underline{r \equiv \frac{x-3}{-3}=\frac{y-5}{4}=\frac{z}{1}}}$

Un punto y un vector direccional de r son $\underline{\underline{P(3,\ 5,\ 0)}}$ y $\underline{\underline{\overrightarrow{v}=(-3,\ 4,\ 1)}}$.

****

2º) Dada la función $f(x)=ax^2+bx+c$, determinad a, b y c para que se cumpla que $f(0)=f(-1)=1$ y $\int_{-1}^{0} f(x)\cdot dx=2$.

$f(0)=1 \Rightarrow \underline{\underline{c=1}}$

$f(-1)=1 \Rightarrow a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+1=1 \;;\; \underline{a-b=0} \qquad (1)$

$\int_{-1}^{0} f(x)\cdot dx=2 \Rightarrow \int_{-1}^{0}(ax^2+bx+1)\cdot dx=\left[\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+x\right]_{-1}^{0}=0-\left[\frac{a\cdot(-1)^3}{3}+\frac{b\cdot(-1)^2}{2}+(-1)\right]=$

$=-\left(-\frac{a}{3}+\frac{b}{2}-1\right)=\frac{a}{3}-\frac{b}{2}+1=2 \;;\; 2a-3b+6=12 \;;\; \underline{2a-3b=6} \qquad (2)$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$\left.\begin{array}{r} a-b=0 \\ 2a-3b=6 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2a-2b=0 \\ -2a+3b=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{b=-6}} \;;\; a-b=0 \;;\; a=b \;;\; \underline{\underline{a=-6}}$

****

3º) Sea A una matriz 2 x 2 no nula. ¿Puede ocurrir que A · A sea la matriz nula? Dad un ejemplo o mostrad que no es posible.

Sea la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2 + bc = 0 \\ ac + dc = 0 \\ ab + bd = 0 \\ bc + d^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2 + bc = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ b(a+d) = 0 \\ bc + d^2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \underline{c = 0 \;\Rightarrow\; a = d = 0 \;\Rightarrow\; b \in R,\; (b \neq 0)} \\ \rightarrow \underline{b = 0 \;\Rightarrow\; a = d = 0 \;\Rightarrow\; c \in R,\; (c \neq 0)} \end{array}$$

<u>En efecto: puede ocurrir que A · A sea la matriz nula no siendo A nula.</u>

Dos ejemplos:

$$1^{\text{o}} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}}$$

$$2^{\text{o}} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}}$$

****

4º) Hallad la distancia entre el punto P(1, -1, 1) y el plano que pasa por los puntos $A(0,\ 1,\ 1)$, $B(1,\ 0,\ 1)$ y $C(1,\ 1,\ 0)$.

Para determinar la ecuación general del plano π que pasa por los puntos A, B y C determinamos dos de los vectores que determinan:

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}=B-A=(1,\ 0,\ 1)-(0,\ 1,\ 1)=(1,\ -1,\ 0)$$

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}=C-A=(1,\ 1,\ 0)-(0,\ 1,\ 1)=(1,\ 0,\ -1)$$

Considerando, por ejemplo, el punto A, la ecuación general de π es la siguiente:

$$\pi(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})\equiv\begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0\ ;;\ x+(z-1)+(y-1)=0\ \Rightarrow\ \underline{\pi\equiv x+y+z-2=0}$$

La distancia del punto $P_0(x_0,\ y_0)$ al plano genérico $\pi\equiv Ax+By+Cz+D=0$ viene dada por la fórmula: $d(P_0,\ \pi)=\dfrac{|\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\ |}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la formula al plano $\pi\equiv x+y+z-2=0$ y al punto P(1, -1, 1):

$$d(P,\ \pi)=\frac{|\ 1\cdot 1+1\cdot(-1)+1\cdot 1-2\ |}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{|1-1+1-2|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{|-1|}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{3}\ unidades=d(P,\ \pi)}}$$

****

5º) Buscad una función, que llamamos f(x), que pase por el punto P(1, 3) y cuya derivada sea la función $f'(x)=x\,L\,x$. Calculad el dominio de f(x) y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$$f(x)=\int f'(x)\cdot dx=\int x\,L\,x\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u=Lx\to du=\dfrac{dx}{x} \\ x\cdot dx=dv\to v=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=L\,x\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{x^2}{2}\cdot L\,x-\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{x^2}{2}\cdot L\,x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+C=\underline{\frac{x^2}{4}(2\,L\,x-1)+C=f(x)}$$

Teniendo en cuenta que la función pasa por el punto P(1, 3):

$$f(1)=3 \Rightarrow \frac{1^2}{4}(2\,L1-1)+C=3\ ;;\ \frac{1}{4}(2\cdot 0-1)+C=3\ ;;\ -\frac{1}{4}+C=3\ ;;\ -1+4C=12\ ;;$$

$$4C=13\ ;;\ \underline{C=\frac{13}{4}} \quad\Rightarrow\quad f(x)=\frac{x^2}{4}(2\,L\,x-1)+\frac{13}{4}\ ;;\ \underline{\underline{f(x)=\frac{1}{4}\left[x^2(2\,L\,x-1)+13\right]}}$$

La función existe cuando sea real el valor de $L\,x$, o sea: $\underline{\underline{D(f)\Rightarrow(0,\ +\infty)}}$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{1}{4}\left[x^2(2\,L\,x-1)+13\right]\right\}=\frac{1}{4}\left[\infty^2(2\,L\,\infty-1)+13\right]=\frac{1}{4}\left[\infty\cdot\infty+13\right]=\underline{\underline{+\infty}}$$

****

PROPUESTA B

1º) Sea la recta $r \equiv \begin{cases} 2x+3y-5z-21=0 \\ x+y-z-8=0 \end{cases}$. Buscad un punto y un vector direccional de r, y calculad sus ecuaciones en forma paramétricas y en forma continua.

2º) Dada la función $f(x)=ax^2+bx+c$, determinad a, b y c para que se cumpla que $f(0)=f(-1)=1$ y $\int_{-1}^{0} f(x)\cdot dx = 2$.

3º) Sea A una matriz 2 x 2 no nula. ¿Puede ocurrir que A · A sea la matriz nula? Dad un ejemplo o mostrad que no es posible.

(RESUELTOS EN LA PROPUESTA A)

4º) Sea $f(x)=x^3\, e^{-x}$. Calculad su dominio, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, y sus puntos de inflexión. Calculad $\underset{x\to+\infty}{lím} f(x)$ y $\underset{x\to-\infty}{lím} f(x)$. Dibujad una gráfica de la función que refleje los datos obtenidos.

$$f(x)=x^3\, e^{-x}=\frac{x^3}{e^x} \;\Rightarrow\; e^x\neq 0,\ \forall x\in R \;\Rightarrow\; \underline{\underline{D(f)=R}}$$

$$f'(x)=3x^2\, e^{-x}+x^3\cdot(-1)\cdot e^{-x}=3x^2\, e^{-x}-x^3\, e^{-x}=\frac{3x^2-x^3}{e^x}=\underline{\frac{x^2(3-x)}{e^x}=f'(x)}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2(3-x)}{e^e}=0\ ;;\ x^2(3-x)=0 \;\Rightarrow\; \underline{x_1=x_2=0}\ ;;\ \underline{x_3=3}$$

$$e^x>0,\ \forall x\in R \;\Rightarrow\; Para \;\Rightarrow \begin{cases} x<3 \;\rightarrow\; f'(x)>0 \;\Rightarrow\; Creciente \\ \\ x>3 \;\rightarrow\; f'(x)<0 \;\Rightarrow\; Decreciente \end{cases}$$

$$\underline{\underline{Creciente \Rightarrow (-\infty,\ 3)}}\ ;;\ \underline{\underline{Decreciente \Rightarrow (3,\ +\infty)}}$$

Para que una función tenga un punto de inflexión es condición necesaria que se anule su segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{(6x-3x^2)e^x-(3x^2-x^3)e^x}{(e^x)^2}=\frac{6x-3x^2-3x^2+x^3}{e^x}=\frac{x^3-6x^2+6x}{e^x}=\underline{\frac{x(x^2-6x+6)}{e^x}=f''(x)}$$

$$f''(0) \;\Rightarrow\; x(x^2-6x+6)=0\ ;;\ \underline{x_1=0}\ ;;\ x^2-6x+6=0\ ;;\ x=\frac{6\pm\sqrt{36-24}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{12}}{2}=$$

$$=\frac{6\pm 2\sqrt{3}}{2}=3\pm\sqrt{3}\ \Rightarrow\ \underline{x_2=3+\sqrt{3}}\ ;;\ \underline{x_3=3-\sqrt{3}}.$$

La condición anterior, que es necesaria, no es suficiente; para que exista un punto de inflexión es necesario que no se anule la tercera derivada para los valores que anulan la segunda:

$$f'''(x)=\frac{\left(3x^2-12x+6\right)e^x-\left(x^3-6x^2+6x\right)e^x}{\left(e^x\right)^2}=\frac{-3x^2-12x+6-x^3+6x^2-6x}{e^x}=$$

$$\underline{=\frac{-x^3+3x^2-18x+6}{e^x}=f'''(x)}$$

$$f'''(0)\neq 0\ \Rightarrow\ P.\ I.\ para\ \ x=0\ \Rightarrow\ f(0)=0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{P.\ I.\Rightarrow\ O(0,\ 0)}}$$

$$f'''\left(3+\sqrt{3}\right)=\frac{-\left(3+\sqrt{3}\right)^3+3\left(3+\sqrt{3}\right)^2-18\left(3+\sqrt{3}\right)+6}{e^{3+\sqrt{3}}}=$$

$$=\frac{-\left(27+27\sqrt{3}+27+3\sqrt{3}\right)+3\left(9+6\sqrt{3}+3\right)-54-18\sqrt{3}+6}{e^{3+\sqrt{3}}}=$$

$$=\frac{-54-30\sqrt{3}+36+18\sqrt{3}-54-18\sqrt{3}+6}{e^{3+\sqrt{3}}}=\frac{-66-30\sqrt{3}}{e^{3+\sqrt{3}}}\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{P.\ I.\ \ para\ \ 3+\sqrt{3}}$$

$$f'''\left(3-\sqrt{3}\right)=\frac{-\left(3-\sqrt{3}\right)^3+3\left(3-\sqrt{3}\right)^2-18\left(3-\sqrt{3}\right)+6}{e^{3-\sqrt{3}}}=$$

$$=\frac{-\left(27-27\sqrt{3}+27-3\sqrt{3}\right)+3\left(9-6\sqrt{3}+3\right)-54+18\sqrt{3}+6}{e^{3-\sqrt{3}}}=$$

$$=\frac{-54+30\sqrt{3}+36-18\sqrt{3}-54+18\sqrt{3}+6}{e^{3-\sqrt{3}}}=\frac{-66+30\sqrt{3}}{e^{3-\sqrt{3}}}\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{P.\ I.\ \ para\ \ 3-\sqrt{3}}$$

$$f\left(3+\sqrt{3}\right)=\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)^3}{e^{3+\sqrt{3}}}=\frac{27+27\sqrt{3}+27+3\sqrt{3}}{e^{3+\sqrt{3}}}=\frac{54+30\sqrt{3}}{e^{3+\sqrt{3}}}\cong\frac{105'96}{113'53}=0'93\ \Rightarrow\ \underline{\underline{P.\ I\Rightarrow A(4'73,\ 0'93)}}$$

$$f\left(3-\sqrt{3}\right)=\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^3}{e^{3-\sqrt{3}}}=\frac{27-27\sqrt{3}+27-3\sqrt{3}}{e^{3-\sqrt{3}}}=\frac{54-30\sqrt{3}}{e^{3-\sqrt{3}}}\cong\frac{2'04}{3'55}=0'57\ \Rightarrow\ \underline{\underline{P.\ I\Rightarrow B(1'27,\ 0'57)}}$$

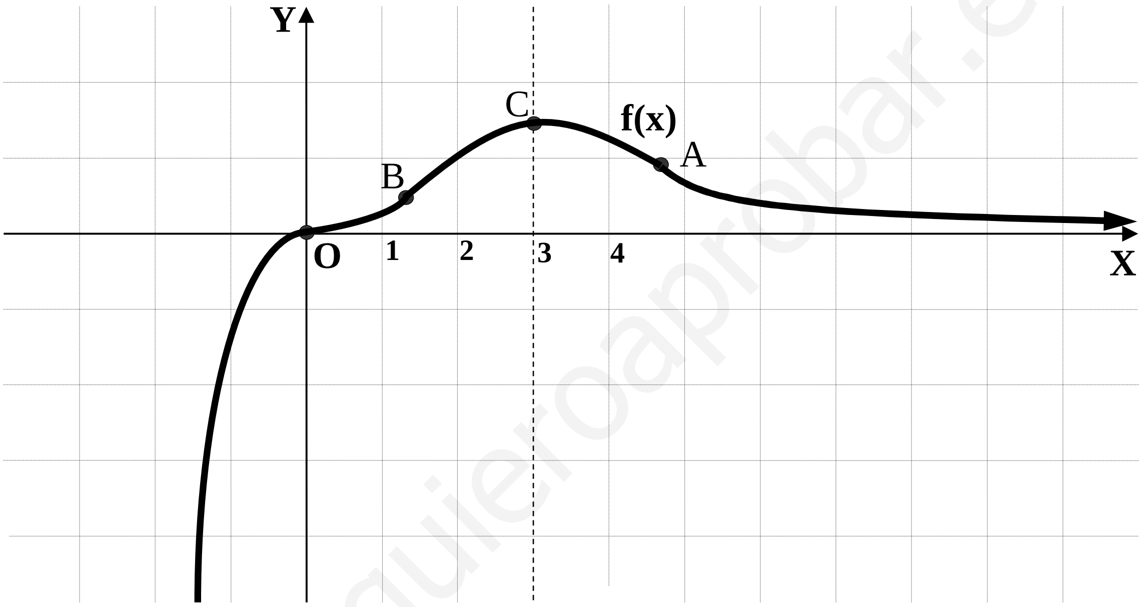
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=\frac{(+\infty)^3}{e^{+\infty}}=\frac{+\infty}{+\infty}\ \Rightarrow\ In\det.\ \Rightarrow\ \{L'Hopital\}\ \Rightarrow\ \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{e^x}\ \Rightarrow$$

$$=\frac{+\infty}{+\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{e^x}=\frac{+\infty}{+\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{e^x}=\frac{6}{+\infty}=\underline{\underline{0}} \Rightarrow \underline{(Asíntota \ \ horizontal: \ y=0)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{-x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x}=\frac{(-\infty)^3}{e^{-\infty}}=-\infty^3 \cdot e^{+\infty}=-\infty \cdot \infty=\underline{\underline{-\infty}}$$

Teniendo en cuenta lo anterior y que la función pasa por el origen de coordenadas, que para x = 3 el punto es C(3, 1’34), la representación gráfica, aproximada, es la siguiente:



****

5º) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ x & y \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$; además, denotemos con A^t a la matriz traspuesta de A. Averiguad para qué valores de x, y, z se cumple la relación $A \cdot A^t = B$.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ x & y \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A^t=\begin{pmatrix} 3 & x \\ 3 & y \end{pmatrix}}}$$

$$A \cdot A^t = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & x \\ 3 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 9+9 & 3x+3y \\ 3x+3y & x^2+y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 3x+3y \\ 3x+3y & x^2+y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} z=18 \\ 3x+3y=0 \\ x^2+y^2=18 \end{array}\right\} \rightarrow x=-y \;;;\; x^2+(-x)^2=18 \;;;\; 2x^2=18 \;;;\; x^2=9 \Rightarrow \underline{x=\pm 3}$$

$$Soluciones: \begin{cases} \underline{\underline{x=3 \;;;\; y=-3}} \\ \\ \underline{\underline{x=-3 \;;;\; y=3}} \end{cases}$$

****