PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JUNIO – 2010 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

PROPUESTA A

1º) Si r es la recta que pasa por el punto P(1, -1, 1) y tiene como vector director $\overrightarrow{v} = (1,\ 2,\ -2)$, ¿existe algún valor de α para el cual la recta r está contenida en el plano $\pi \equiv 2x + 3y + 4z = a$? En caso afirmativo, encuentra el valor de α. En caso negativo, razona tu respuesta.

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$.

Para que una recta está contenida en un plano es condición suficiente que dos puntos de la recta pertenezcan al plano.

Dos puntos de la recta son P(1, -1, 1) y Q(2, 1, -1).

Los puntos P y Q pertenecen al plano π si satisfacen su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x + 3y + 4z = a \\ P(1,\ -1,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 = a\ ;;\ 2 - 3 + 4 = a\ ;;\ \underline{a = 3}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x + 3y + 4z = a \\ Q(2,\ 1,\ -1) \end{array}\right\} \Rightarrow\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = a\ ;;\ 4 + 3 - 4 = a\ ;;\ \underline{a = 3}.$$

La recta r está contenida en el plano π para $\alpha = 3$.

****

2º) Halla el valor de α para que la función $f(x)=\frac{x^2+x+a}{3x+1}$ verifique $f'(1)=0$.

$$f'(x)=\frac{(2x+1)\cdot(3x+1)-(x^2+x+a)\cdot 3}{(3x+1)^2}=\frac{6x^2+2x+3x+1-3x^2-3x-3a}{(3x+1)^2}=\frac{3x^2+2x+1-3a}{(3x+1)^2}.$$

$$f'(1)=0 \Rightarrow \frac{3\cdot 1^2+2\cdot 1+1-3a}{(3\cdot 1+1)^2}=0\ ;;\ 3+2+1-3a=0\ ;;\ 6-3a=0\ ;;\ \underline{\underline{a=2}}.$$

****

3º) Calcula la integral $I = \int \frac{2x}{x^2+5} \cdot dx$.

$$I = \int \frac{2x}{x^2+5} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2+5=t \\ 2x \cdot dx = dt \end{array} \right\} \Rightarrow I = \int \frac{1}{t} \cdot dt = L\,t + C = L\left(x^2+5\right)+C$$

$$\underline{\underline{I = \int \frac{2x}{x^2+5} \cdot dx = L\left(x^2+5\right)+C}}$$

****

4º) Calcula los siguientes límites: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - sen\ x}{x \cdot sen\ x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2^x + x}{e^x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - sen\ x}{x \cdot sen\ x} = \frac{0-0}{0 \cdot 0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow (L'Hopital) \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos\ x}{1 \cdot sen\ x + x \cdot \cos\ x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos\ x}{sen\ x + x \cdot \cos\ x} = \frac{1-1}{0 + 0 \cdot 1} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow (L'Hopital) \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{\cos\ x + 1 \cdot \cos\ x - x \cdot sen\ x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{\cos\ x + \cos\ x - x \cdot sen\ x} = \lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{2\cos\ x - x \cdot sen\ x} = \frac{0}{2 \cdot 1 - 0 \cdot 0} = \frac{0}{2} = \underline{\underline{0}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x + x}{e^x} = \frac{2^\infty + \infty}{e^\infty} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2^x}{e^x} + \frac{x}{e^x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2^x}{e^x} + \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = A + B.$$

$$A = \lim_{x \to +\infty} \frac{2^x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{e} \right)^x = \underline{0} \quad (Por\ \ ser\ \ 2 < e).$$

$$B = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{e^\infty} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = \underline{0}.$$

$$\underline{\underline{\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x + x}{e^x} = A + B = 0 + 0 = 0}}$$

****

5º) Discute y resuelve, según los valores de α, el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x-y+z=a \\ x+y+z=1 \\ 3x-3y+az=a \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & a \end{pmatrix} \ y \ A'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & a & a \end{pmatrix}.$$

El rango de A en función del parámetro α es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & a \end{vmatrix}=a-3-3-3+3+a=2a-6=0 \ ;; \ a-3=0 \ ;; \ \underline{a=3}.$$

$$\underline{\underline{Para \ \ a\neq 3 \ \Rightarrow \ Rango \ A=Rango \ A'=3=n^{o} \ incógnitas \ \Rightarrow \ Compatible \ Deter\min ado}}$$

$$Para \ a=3 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1=C_3\} \Rightarrow Rango \ de \ A' \Rightarrow \{C_1, \ C_2, \ C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix}=3-9-3-9+3+3=-12\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango \ de \ A'=3}.$$

$$\underline{\underline{Para \ a=3 \Rightarrow Rango \ A=2 \ ;; \ Rango \ A'=3 \Rightarrow Incompatible}}$$

Resolvemos para α ≠ 1 mediante la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & -3 & a \end{vmatrix}}{2a-6}=\frac{a^2-3-a-a+3a+a}{2(a-3)}=\frac{a^2+2a-3}{2(a-3)}=\underline{\underline{\frac{(a+3)(a-1)}{2(a-3)}=x}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & a & a \end{vmatrix}}{2a-6}=\frac{a+a+3a-3-a-a^2}{2(a-3)}=\frac{-a^2+4a-3}{2(a-3)}=\frac{-(a-3)(a-1)}{2(a-3)}=\underline{\underline{\frac{1-a}{2}=y}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & a\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & -3 & a\end{vmatrix}}{2a-6}=\frac{a-3a-3-3a+3+a}{2(a-3)}=\frac{-4a}{2(a-3)}=\underline{\underline{\frac{-2a}{a-3}=z}}$$

****

PROPUESTA B

1º) Si r es la recta que pasa por el punto P(1, -1, 1) y tiene como vector director $\overrightarrow{v}=(1,\ 2,\ -2)$, ¿existe algún valor de α para el cual la recta r está contenida en el plano $\pi \equiv 2x+3y+4z=a$? En caso afirmativo, encuentra el valor de α. En caso negativo, razona tu respuesta.

2º) Halla el valor de α para que la función $f(x)=\frac{x^2+x+a}{3x+1}$ verifique $f'(1)=0$.

3º) Calcula la integral $I=\int \frac{2x}{x^2+5}\cdot dx$.

(Resueltos en la propuesta A)

4º) Determina los valores de α y b para que los puntos P(1, 0, 1) y Q(⅓, α, b) sean simétricos respecto del plano $\pi \equiv x-y+z=1$.
(Recuerda que: dos puntos se dicen simétricos respecto de un plano si están en una recta perpendicular al plano y a la misma distancia de éste).

La recta r perpendicular al plano π y que pasa por el punto P(1, 0, 1) tiene como vector director al vector normal al plano π, que es $\overrightarrow{n}=(1,\ -1,\ 1)$; su expresión por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente: $r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$.

El punto medio del segmento de extremos P(1, 0, 1) y Q(⅓, α, b) es el siguiente: $M\left(\frac{2}{3},\ \frac{a}{2},\ \frac{b+1}{2}\right)$, que pertenece a r, por lo cual tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases} \\ M\left(\frac{2}{3},\ \frac{a}{2},\ \frac{b+1}{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 1+\lambda=\frac{2}{3} \Rightarrow \underline{\lambda=-\frac{1}{3}} \\ -\lambda=\frac{a}{2} \Rightarrow \frac{1}{3}=\frac{a}{2} \Rightarrow \underline{a=\frac{2}{3}} \\ 1+\lambda=\frac{b+1}{2} \Rightarrow 1-\frac{1}{3}=\frac{b+1}{2} \;;;\; \frac{2}{3}=\frac{b+1}{2} \;;;\; 4=3b+3 \;;;\; \underline{b=\frac{1}{3}} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{\textit{Los puntos P y Q son simétricos a } \pi \textit{ para } a=\frac{2}{3} \textit{ y } b=\frac{1}{3}}}$$

****

5º) Pala la función $f(x)=L(x^2-9)$, calcula su dominio, sus asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos y puntos de inflexión. Haz su representación gráfica.

Por tratarse de una función logarítmica, su dominio de definición es aquél que haga que los valores de (x^2-9) pertenezcan a R^+.

$$x^2-9>0 \Rightarrow x^2-9=0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1=-3} \\ \underline{x_2=+3} \end{cases}.$$

Por ser la función $g(x)=x^2-9$ una parábola convexa $(\cup)$ que corta al eje OX en los puntos de abscisa x = -3 y x = 3, en el intervalo $(-3,\ 3)$ sus ordenadas son negativas, por lo que el dominio de definición de f(x) es el siguiente:

$$\underline{\underline{D(f) \Rightarrow (-\infty,\ -3) \cup (3,\ +\infty)}}$$

Las asíntotas verticales son los límites laterales de los extremos del intervalo para el cual no está definida la función, que es $(-3,\ 3)$.

$$\underset{x \to -3^-}{Lím} f(x) = \underset{x \to -3^-}{Lím} \left[L(x^2-9)\right] = L\,0^+ = -\infty.$$

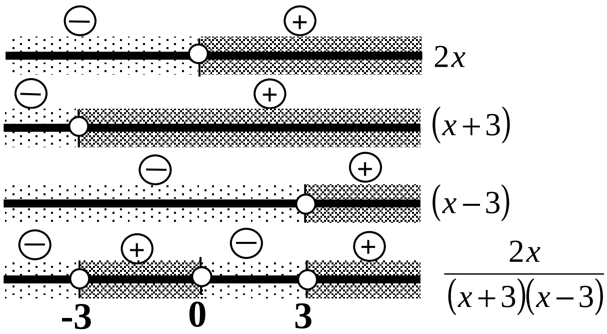
$$\underset{x \to 3^+}{Lím} f(x) = \underset{x \to 3^+}{Lím} \left[L(x^2-9)\right] = L\,0^+ = -\infty.$$

<u>Son asíntotas verticales las rectas x = -3 y x = 3. con las tendencias indicadas.</u>

Una función es creciente o decreciente cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2-9}=\frac{2x}{(x-3)(x+3)}.$$

Teniendo en cuenta el dominio de definición de la función y es esquema adjunto:



$$\underline{\underline{Decreciente: (-\infty,\ -3)}} \;;;\; \underline{\underline{Creciente: (3,\ +\infty)}}$$

Existe un máximo relativo para los valores reales de x que anulan la primera derivada y hacen negativa a la segunda derivada y, existe un mínimo relativo para los valores reales de x que anulan la primera derivada y hacen positiva a la segunda derivada.

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{2x}{(x-3)(x+3)}=0 \;;;\; 2x=0 \;;;\; \underline{x=0} \;\Rightarrow\; \underline{x \notin D(f)}.$$

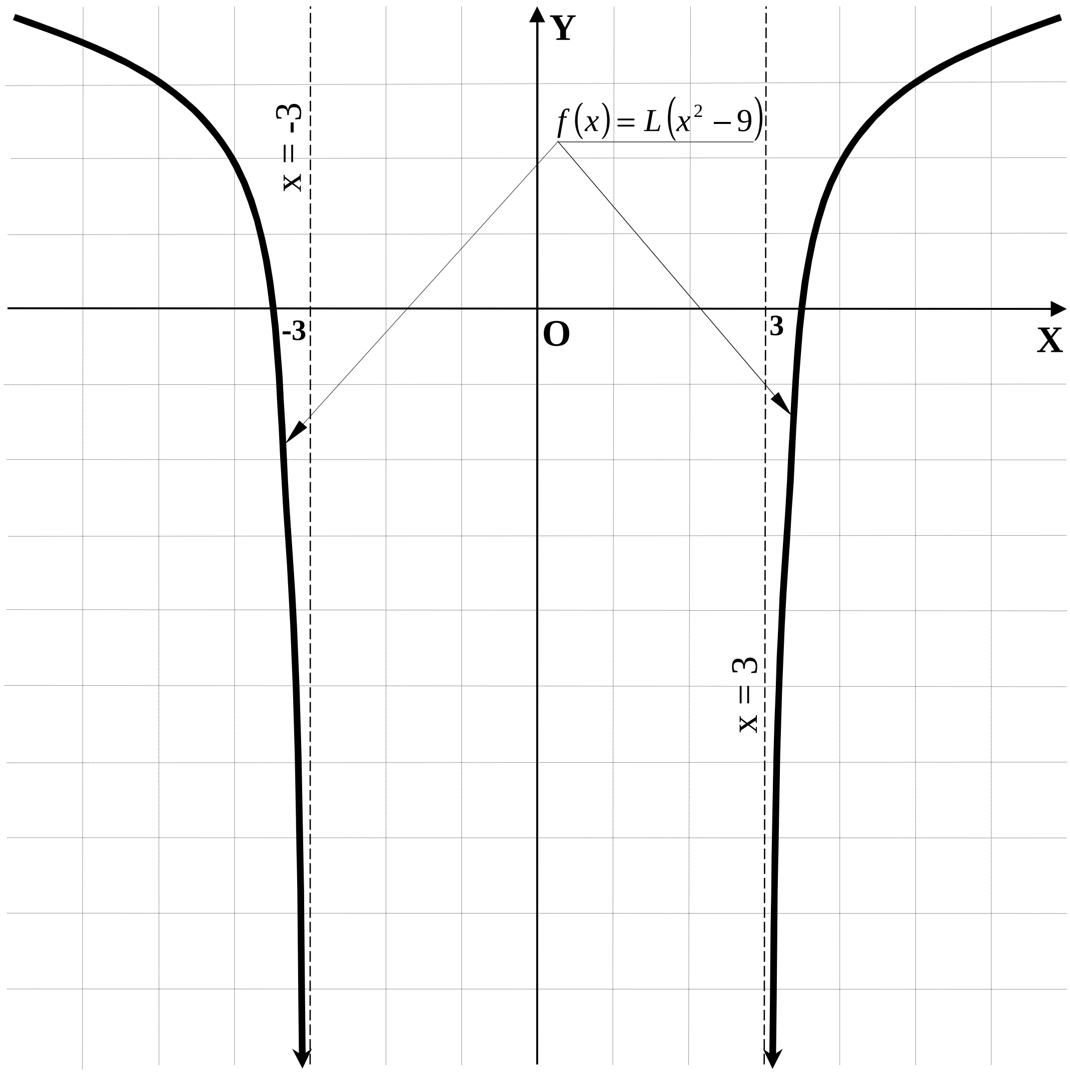
$$\underline{\underline{La \quad función \quad f(x) \quad no \quad tiene \quad máximos \quad ni \quad mínimos \quad relativos}}$$

Para que una función tenga un punto de inflexión es condición necesaria que se anule su segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{2\cdot(x^2-9)-2x\cdot 2x}{(x^2-9)^2}=\frac{2x^2-18-4x^2}{(x^2-9)^2}=\frac{-2x^2-18}{(x^2-9)^2}=\frac{-2(x^2+9)}{(x^2-9)^2} \Rightarrow \underline{f''(x)\neq 0,\ \forall x \in R}.$$

$$\underline{\underline{La \quad función \quad f(x) \quad no \quad tiene \quad puntos \quad de \quad \inf lexión}}$$

Teniendo en cuenta lo anterior y la función es simétrica con respecto al eje de ordenadas, por ser $f(-x)=f(x)$, su representación gráfica, aproximada, es la siguiente:



****