PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

SEPTIEMBRE – 2011 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

PROPUESTA A

1º) Encuentra un vector perpendicular al plano dado por las siguientes ecuaciones paramétricas $\pi \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda + \mu \\ y = 4 + 5\lambda - \mu \\ z = -3 + 4\lambda + 2\mu \end{cases}$.

Los vectores directores del plano π son $\overrightarrow{u} = (-3,\ 5,\ 4)$ y $\overrightarrow{v} = (1,\ -1,\ 2)$.

Un vector normal de π es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de sus vectores directores.

$$\overrightarrow{n'} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 10i + 4j + 3k - 5k + 4i + 6j = 14i + 10j - 2k = (14,\ 10,\ -2).$$

Un vector normal del plano π es $\underline{\underline{\overrightarrow{n} = (7,\ 5,\ -1)}}$.

****

2º) Halla el punto de la gráfica de la función $f(x)=x+Lx$ en el que la recta tangente a f(x) es perpendicular a la recta $x+3y=1$.

La recta se puede expresar de la forma $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$, cuya pendiente es $m=-\frac{1}{3}$.

Las rectas perpendiculares tienen sus pendientes inversas y de signo contrario, por lo cual la recta perpendicular a $x+3y=1$ tiene de pendiente $m'=3$.

La pendiente a una función en un punto es el valor de su derivada en ese punto, por lo cual tiene que ser $f'(x)=3$.

$$f'(x)=1+\frac{1}{x}=3\ ;;\ \frac{1}{x}=2\ \Rightarrow\ \underline{x=\frac{1}{2}}.$$

El punto P de tangencia es el siguiente:

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+L\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+L1-L2=\frac{1}{2}+0-L2=\frac{1}{2}-L2\ \Rightarrow\ \underline{\underline{P\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}-L2\right)}}.$$

La recta que pasa por un punto conocida la pendiente viene dada por la siguiente fórmula: $y-y_0=m(x-x_0)$. Aplicada al punto $P\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}-L2\right)$ con pendiente 3, resulta:

$$y-\left(\frac{1}{2}-L2\right)=3\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\ ;;\ 2y-1-2L2=6x-6\ ;;\ 6x-2y-5+L4=0.$$

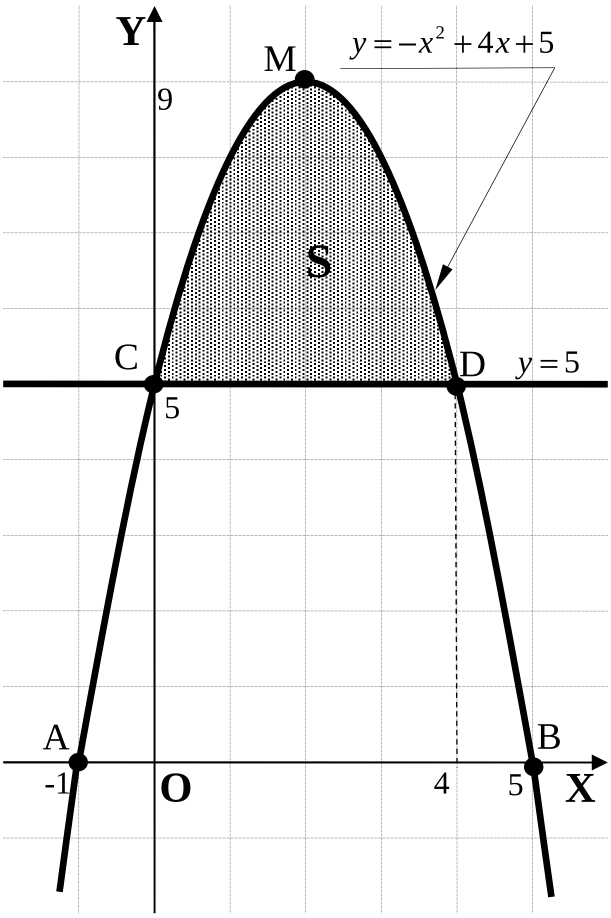
La ecuación de la recta tangente es $\underline{t\equiv 6x-2y-(5-L4)=0}$.

****

3º) Dibuja la figura limitada por la curva $y=-x^2+4x+5$, y la recta $y=5$. Halla el área de dicha figura.

La curva $y=-x^2+4x+5$ es una parábola cóncava $(\cap)$ cuyo vértice es el punto siguiente:

$$y'=-2x+4=0 \;;;\; -2(x-2)=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow \underline{M(2,\ 9)}.$$



Los puntos de corte de la parábola con el eje de abscisas son:

$$y=-x^2+4x+5=0 \;;;\; x^2-4x-5=0 \;;;$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{4\pm 6}{2}=2\pm 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \rightarrow \underline{A(-1,\ 0)} \\ x_2=5 \rightarrow \underline{B(5,\ 0)} \end{cases}.$$

Los puntos de corte de la parábola con la recta se obtienen igualando sus expresiones:

$$-x^2+4x+5=5 \;;;\; -x^2+4x=0 \;;;$$

$$-x(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \rightarrow \underline{C(0,\ 5)} \\ x_2=4 \rightarrow \underline{D(4,\ 5)} \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la de la figura.

De la observación de la figura se deduce el área pedida, que es la siguiente:

$$S=\int_0^4\left[\left(-x^2+4x+5\right)-5\right]\cdot dx=\int_0^4\left(-x^2+4x\right)\cdot dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{4x^2}{2}\right]_0^4=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2\right]_0^4=\left(\frac{4^3}{3}-2\cdot 4^2\right)-0=$$

$$=\frac{64}{3}-32=\frac{64-96}{3}=\underline{\underline{\frac{32}{3}\,u^2=S}}.$$

****

4º) Para la función $f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$, calcula el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y una primitiva.

El dominio de una función racional es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$x^2-4=0 \Rightarrow (x+2)(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2 \\ \underline{x_2=2} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{D(f) \Rightarrow R-\{-2,\ 2\}}}.$$

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, derivamos, teniendo en cuenta que una función es creciente o decreciente cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente:

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-4)-x^2\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{2x^3-8x-2x^3}{(x^2-4)^2}=\underline{\frac{-8x}{(x^2-4)^2}=f'(x)}.$$

Como el denominador de la derivada es siempre positivo para cualquier valor real perteneciente al dominio de la función, solamente estudiaremos el numerador.

$$f'(x)=\frac{-8x}{(x^2-4)^2} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{f'(x)>0 \Rightarrow \underline{x<0} \Rightarrow Creciente \Rightarrow (-\infty,\ -2)\cup(-2,\ 0)}} \\ \\ \underline{\underline{f'(x)<0 \Rightarrow x>0 \Rightarrow Decreciente \Rightarrow (0,\ 2)\cup(2,\ +\infty)}} \end{cases}.$$

Una primitiva de la función se obtiene integrando la función:

$$F(x)=\int f(x)\cdot dx=\int \frac{x^2}{x^2-4}\cdot dx=\int \frac{x^2-4+4}{x^2-4}\cdot dx=\int \frac{x^2-4}{x^2-4}\cdot dx+4\cdot\int \frac{1}{x^2-4}\cdot dx=$$

$$=\int dx+4\cdot\int \frac{1}{x^2-4}\cdot dx=\underline{x+4I=F(x)}. \quad (*)$$

$$I=\int \frac{1}{x^2-4}\cdot dx=\int \frac{1}{(x-2)(x+2)}\cdot dx \Rightarrow \frac{1}{(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}=\frac{Ax+2A+Bx-2B}{(x-2)(x+2)}=$$

$$=\frac{x(A+B)+(2A-2B)}{(x-2)(x+2)} \Rightarrow \left.\begin{matrix} A+B=0 \\ A-B=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2A=1 \ ;;\ \underline{A=\frac{1}{2}} \ ;;\ \underline{B=-\frac{1}{2}} \Rightarrow I=\int \frac{\frac{1}{2}}{x-2}\cdot dx-\int \frac{\frac{1}{2}}{x+2}\cdot dx=$$

$$=\frac{1}{2}L|x-2|-\frac{1}{2}L|x+2|+K=\underline{\frac{1}{2}L\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+K=I}.$$

Sustituyendo en (*) el valor de I y dando cualquier valor real a K, por ejemplo el valor K = 0, se obtiene una función primitiva F(x) de la función f(x):

$$F(x) = x + 2L\left|\frac{x-2}{x+2}\right| = x + L\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2$$

****

5º) Determina una ecuación del plano π que contiene a la recta $r\equiv\frac{x-1}{3}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-2}{5}$ y es paralelo a la recta $s\equiv\frac{x}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{3}$. Encuentra tres puntos no alineados dentro del plano que has dado.

El plano π, por contener a r contiene al punto de r A(1, -4, 2) y tiene como vector director al vector director de r, que es $\overrightarrow{v_r}=(3,\ 1,\ 5)$.

El plano π, por ser paralelo a la recta s tiene como vector director al vector director de s, que es $\overrightarrow{v_s}=(2,\ -2,\ 3)$.

La expresión general del plano π es la siguiente:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}\right)\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y+4 & z-2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}=0\ ;;$$

$$3(x-1)+10(y+4)-6(z-2)-2(z-2)+10(x-1)-9(y+4)=0\ ;;\ 13(x-1)+(y+4)-8(z-2)=0\ ;;$$

$$13x-13+y+4-8z+16=0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\pi\equiv 13x+y-8z+7=0}}.$$

Un punto de π es A(1, -4, 2). Para obtener otros dos puntos de π de forma sencilla, damos valores arbitrarios sencillos a las variables "x, z" y obtenemos en la ecuación general del plano los valores de "y"; por ejemplo:

$$\left.\begin{matrix} x=0 \\ z=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow y=-7\Rightarrow \underline{B(0,\ -7,\ 0)}. \qquad \left.\begin{matrix} x=1 \\ z=1 \end{matrix}\right\}\Rightarrow 13+y-8+7=0\ ;;\ y=-12\Rightarrow \underline{C(1,\ -12,\ 1)}.$$

Para que los puntos no estén alineados es necesarios que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ sean linealmente independientes:

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(0,\ -7,\ 0)-(1,\ -4,\ 2)=(-1,\ -3,\ -2).$$

$$\overrightarrow{AC}=C-A=(1,\ -12,\ 1)-(1,\ -4,\ 2)=(0,\ -8,\ -1).$$

Es evidente que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son linealmente independientes, por no tener sus componentes proporcionales.

<u>Los puntos A(1, -4, 2), B(0, -7, 0) y C(1, -12, 1) no están alineados y pertenecen a π.</u>

****

PROPUESTA B

1º) Encuentra un vector perpendicular al plano dado por las siguientes ecuaciones paramétricas $\pi \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda + \mu \\ y = 4 + 5\lambda - \mu \\ z = -3 + 4\lambda + 2\mu \end{cases}$.

2º) Halla el punto de la gráfica de la función $f(x) = x + Lx$ en el que la recta tangente a f(x) es perpendicular a la recta $x + 3y = 1$.

3º) Dibuja la figura limitada por la curva $y = -x^2 + 4x + 5$, y la recta $y = 5$. Halla el área de dicha figura.

(Resueltos en la propuesta A)

4º) Si α, b son dos parámetros no nulos, encuentra la relación que se debe dar entra ambas para que los puntos A(1, 0, 0), B(α, b, 0), C(α, 0, b) y D(0, α, b) estén en un mismo plano. Determina la ecuación del plano que contiene a los cuatro puntos.

Los puntos A(1, 0, 0), B(α, b, 0), C(α, 0, b) y D(0, α, b) determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (a,\ b,\ 0) - (1,\ 0,\ 0) = (a-1,\ b,\ 0).$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (a,\ 0,\ b) - (1,\ 0,\ 0) = (a-1,\ 0,\ b).$$

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD} = D - A = (0,\ a,\ b) - (1,\ 0,\ 0) = (-1,\ a,\ b).$$

Para que los puntos A(1, 0, 0), B(α, b, 0), C(α, 0, b) y D(0, α, b) pertenezcan al plano π es necesario que los vectores $\{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\}$ sean linealmente dependientes, o sea, que el rango de los vectores $\{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\}$ sea menor que tres; de otra forma: el determinante que forman tiene que valer cero.

$$\begin{vmatrix} a-1 & b & 0 \\ a-1 & 0 & b \\ -1 & a & b \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ -b^2 - ab(a-1) - b^2(a-1) = 0 \ ;;\ b^2 + ab(a-1) + b^2(a-1) = 0 \ ;;$$

$$b^2 + (a-1)(ab + b^2) = 0 \ ;;\ b^2 + b(a-1)(a+b) = 0 \ ;;\ b \cdot [b + (a-1)(a+b)] = 0 .$$

Como es, por definición, b ≠ 0, tiene que ser $b + (a-1)(a+b) = 0$. Operando:

$$b+a^2+ab-a-b=0 \;;;\; a^2+ab-a=0 \;;;\; a\cdot(a+b-1)=0.$$

Como es, por definición, a ≠ 0, tiene que ser $a+b-1=0$, de donde se deduce que:

$\underline{\underline{\text{A(1, 0, 0), B(α, b, 0), C(α, 0, b) y D(0, α, b) son coplanarios cuando α + b = 1.}}}$

Considerando, por ejemplo, el punto A(1, 0, 0) y los vectores hallados anteriormente $\overrightarrow{u}=(a-1,\ 1-a,\ 0)$ y $\overrightarrow{v}=(a-1,\ 0,\ 1-a)$, la ecuación general del plano π es la siguiente:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ a-1 & 1-a & 0 \\ a-1 & 0 & 1-a \end{vmatrix}=0 \;;;\; (1-a)^2(x-1)-(1-a)(a-1)z-(1-a)(a-1)y=0 \;;;$$

$$(1-a)^2(x-1)+(1-a)^2z+(1-a)^2y=0 \;;;\; x-1+y+z=0 \Rightarrow \underline{\underline{\pi\equiv x+y+z-1=0}}.$$

****

5º) Calcula el dominio, los puntos de intersección con los ejes, las asíntotas y los extremos relativos de la función $f(x)=\frac{x}{e^x}$.

La función está definida en R, por ser $e^x \neq 0,\ \forall x \in R$.

Para x = 0 es f(x) = 0, por lo tanto: f(x) pasa por el origen de coordenadas. (y no tiene más cortes con el eje X).

Las asíntotas son:

Paralelas a X:

$$y=k=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow In\det.\Rightarrow (L'Hopital)\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}=\frac{1}{e^x}=\underline{\underline{0=y}}.$$

$$y=k=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}=\frac{-\infty}{e^{-\infty}}=-\infty\cdot\infty=-\infty \Rightarrow \underline{\underline{No}}.$$

Paralelas a Y: $e^x=0 \Rightarrow x\notin R \Rightarrow \underline{\underline{No\ \ tiene}}$.

Oblicuas: son de la forma y = mx + n

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\cdot e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{\infty}=0 \Rightarrow \underline{\underline{No\ \ tiene}}$$

Los máximos y mínimos relativos son:

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{1-x}{e^x}=0\ \ ;;\ \ 1-x=0\ \ ;;\ \ \underline{x=1}.$$

$$f''(x)=\frac{-1\cdot e^x-(1-x)\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{-1-(1-x)}{e^x}=\frac{-1-1+x}{e^x}=\underline{\frac{x-2}{e^x}=f''(x)}.$$

$$f''(1)=\frac{1-2}{e^1}=\frac{-1}{e}<0\Rightarrow \underline{M\acute{a}ximo\ \ relativo\ \ para\ \ x=1}.$$

$$f(1)=\frac{1}{e^1}=\frac{1}{e}\Rightarrow \underline{\underline{M\acute{a}x.\Rightarrow P\left(1,\ \frac{1}{e}\right)}}$$

****