PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JUNIO – 2012

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

PROPUESTA A

1º) Sea f(x) una función positiva en el intervalo [1, 5], así $f(x) \geq 0$ para $1 \leq x \leq 5$. Si el área limitada por f(x), el eje de abscisas (eje X) y las rectas x = 1 y x = 5 es igual a 6, calcula el área del recinto limitado por la función $g(x) = f(x) + 2$ y las mismas rectas.

Teniendo en cuenta que $\int_a^b [f(x) + g(x)] \cdot dx = \int_a^b f(x) \cdot dx + \int_a^b g(x) \cdot dx$:

$$S = \int_1^5 [f(x) + 2] \cdot dx = \int_1^5 f(x) \cdot dx + \int_1^5 2 \cdot dx = 6 + [2x]_1^5 = 6 + (10 - 2) = 6 + 8 = \underline{\underline{14\ u^2 = S}}$$

****

2º) Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1+x-e^x}{sen^2\, x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1+x-e^x}{sen^2\, x} = \frac{1+0-e^0}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1-e^x}{2\, sen\; x \cdot \cos\, x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1-e^x}{sen\,(2x)} = \frac{1-e^0}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{-e^x}{2\cos\,(2x)} = \frac{-1}{2 \cdot 1} = -\underline{\frac{1}{2}}.$$

$$\underline{\underline{\lim_{x \to 0} \frac{1+x-e^x}{sen^2\, x} = -\frac{1}{2}}}$$

****

3º) Si $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, determina la matriz X despejándola previamente de la ecuación matricial $2A-AX=BX$.

(Observa las dimensiones que ha de tener la matriz X para que la ecuación matricial tenga sentido)

$$2A-AX=BX \;\;;;\;\; 2A=BX+AX=(B+A)\cdot X \;.$$

Multiplicando los dos términos por la izquierda por la matriz inversa de (B + A):

$$(B+A)^{-1}\cdot 2A=(B+A)^{-1}\cdot(B+A)\cdot X \;\;;;\;\; (B+A)^{-1}\cdot 2A=I\cdot X=X \;\Rightarrow\; \underline{\underline{X=2\cdot(B+A)^{-1}\cdot A}}\,.$$

$$B+A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Para hallar la inversa de (B + A) se utiliza el método de Gauss-Jordan.

$$(B+A/I)=\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{F_1 \to \tfrac{1}{3}F_1\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \tfrac{1}{3} & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{F_2 \to F_2-3F_1\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \tfrac{1}{3} & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{F_2 \to \tfrac{1}{4}F_2\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \tfrac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\tfrac{1}{4} & \tfrac{1}{4} \end{array}\right) \Rightarrow \underline{(B+A)^{-1}=\begin{pmatrix} \tfrac{1}{3} & 0 \\ -\tfrac{1}{4} & \tfrac{1}{4} \end{pmatrix}}.$$

Sustituyendo en la expresión de X y operando:

$$X=2\cdot(B+A)^{-1}\cdot A=2\cdot\begin{pmatrix} \tfrac{1}{3} & 0 \\ -\tfrac{1}{4} & \tfrac{1}{4} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix} \tfrac{2}{3}+0 & \tfrac{1}{3}+0 \\ -\tfrac{2}{4}+\tfrac{3}{4} & -\tfrac{1}{4}+\tfrac{2}{4} \end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix} \tfrac{2}{3} & \tfrac{1}{3} \\ \tfrac{1}{4} & \tfrac{1}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \tfrac{4}{3} & \tfrac{2}{3} \\ \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\underline{\underline{X=\begin{pmatrix} \tfrac{4}{3} & \tfrac{2}{3} \\ \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \end{pmatrix}}}$$

****

4º) Prueba que para cualquier valor de α ≠ 0, los planos $\pi_1 \equiv x + ay - az = 0$ y $\pi_2 \equiv -x + 2ay - 2az = 0$ se cortan en una recta r. Calcula la posición relativa de r respecto del plano que pasa por el origen de coordenadas y los puntos A(1, 0, -6) y B(0, 2, α + 3) (se supone que α ≠ 0 para que r esté definida).

Los vectores normales de los planos son $\overrightarrow{n_1} = (1,\ a,\ -a)$ y $\overrightarrow{n_2} = (-1,\ 2a,\ -2a)$, respectivamente.

Los vectores $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes, independientemente del valor de α, por ser $\frac{1}{-1} \neq \frac{a}{2a},\ \forall a \in R,\ a \neq 0$, lo que prueba que

<u>Los planos π_1 y π_2 se cortan en una recta r.</u>

Los puntos A(1, 0, -6) y B(0, 2, α + 3) con el origen de coordenadas determinan los vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA} = (1,\ 0,\ -6)$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB} = (0,\ 2,\ a+3)$.

La expresión general del plano β que contiene al origen y a los puntos A y B es la siguiente:

$$\beta\left(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & a+3 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ 2z + 12x - (a+3)y = 0 \Rightarrow \underline{\beta \equiv 12x - (a+3)y + 2z = 0}.$$

El vector normal del plano β es $\overrightarrow{n} = (12,\ -a-3,\ 2)$.

La recta r definida por los planos es $r \equiv \begin{cases} x + ay - az = 0 \\ -x + 2ay - 2az = 0 \end{cases}$. Un vector director de r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan:

$$\overrightarrow{v'_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & a & -a \\ -1 & 2a & -2a \end{vmatrix} = -2a^2 i + aj + 2ak + ak + 2a^2 i + 2aj = 3aj + 3ak \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_r} = (0,\ 1,\ 1)}.$$

Los vectores $\overrightarrow{n} = (12,\ -a-3,\ 2)$ y $\overrightarrow{v_r} = (0,\ 1,\ 1)$ son linealmente independientes, por lo cual:

<u>La recta r y el plano β no son perpendiculares, para cualquier valor real de α.</u>

El producto escalar de los vectores $\overrightarrow{n} = (12,\ -a-3,\ 2)$ y $\overrightarrow{v_r} = (0,\ 1,\ 1)$ es:

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v_r} = (12, -a-3, 2) \cdot (0, 1, 1) = 0 - a - 3 + 2 = -a - 1 = 0 \Rightarrow \underline{a = -1}.$$

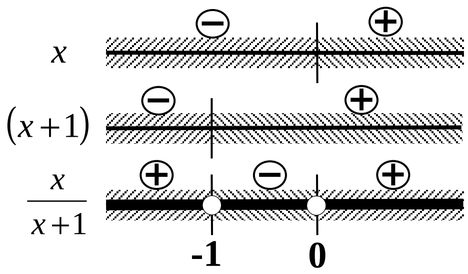
Para α = -1 la recta r y el plano β son paralelos y, como quiera que los dos contienen al origen de coordenadas:

Para α = -1 la recta r está contenida en el plano β.

****

5º) Calcula el dominio y representa gráficamente la función $f(x) = L\frac{x}{x+1}$.

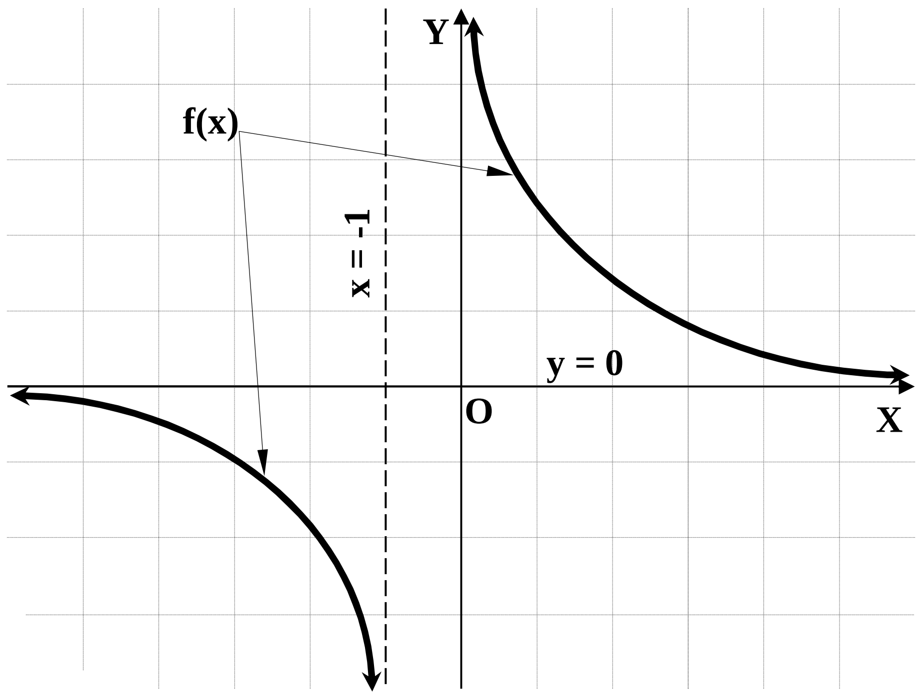
El dominio de la función f(x) es el conjunto de valores reales de x que hacen que $\frac{x}{x+1} > 0$, lo cual se observa claramente a través del gráfico adjunto.



$\underline{\underline{D(f) \Rightarrow (-\infty,\ -1) \cup (0,\ +\infty)}}$

Asíntotas horizontales: son de la forma y = k, siendo k el límite cuando x tiende a infinito o menos infinito de la función.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(L\frac{x}{x+1} \right) = L \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x+1} = L1 = 0 \Rightarrow \text{ \underline{Saint. horizontal y = 0.}}$$



Asíntotas verticales: son de la forma x = k; son los valores finitos de x para los cuales el valor de la función es más o menos infinito. En el caso que nos ocupa, que es una función logarítmica, las posibles asíntotas verticales son los valores de los límites laterales de los extremos de los dominios de existencia de la función.

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \left(L\frac{x}{x+1} \right) = L \lim_{x \to -1^-} \frac{x}{x+1} = L\frac{-1}{0^-} = L\infty = +\infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ <u>La recta x = -1 es asíntota vertical con tendencia a más infinito.</u>

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(L \frac{x}{x+1} \right) = L \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x+1} = L \frac{0}{1} = L\,0 = -\infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ La recta x = 0 es asíntota vertical con tendencia a menos infinito.

La representación gráfica, aproximada, es la que observa en la figura adjunta.

****

PROPUESTA B

1º) Sea f(x) una función positiva en el intervalo [1, 5], así $f(x) \geq 0$ para $1 \leq x \leq 5$. Si el área limitada por f(x), el eje de abscisas (eje X) y las rectas x = 1 y x = 5 es igual a 6, calcula el área del recinto limitado por la función $g(x) = f(x) + 2$ y las mismas rectas.

2º) Calcula el siguiente límite: $\lim_{x \to 0} \frac{1 + x - e^x}{sen^2 x}$.

3º) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, determina la matriz X despejándola previamente de la ecuación matricial $2A - AX = BX$.

(Observa las dimensiones que ha de tener la matriz X para que la ecuación matricial tenga sentido)

(Resueltos en la Propuesta A)

4º) Enuncia el teorema de Rolle. Encuentra los ceros de la primera derivada de la función $f(x) = x^3 - 12x + a$. Usa finalmente la información previa para probar que, con independencia del valor de α, la ecuación $x^3 - 12x + a = 0$ no tiene dos soluciones distintas en el intervalo [-2, 2].

El teorema de Rolle se enuncia del modo siguiente: “Si f(x) es una función continua en el intervalo [a, b] y derivable en (a, b) y si se cumple que f(a) = f(b), existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que f’(x) = 0”.

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \;;;\; x^2 - 4 = 0 \;;;\; \underline{x_1 = -2} \;;;\; \underline{x_2 = 2}.$$

La función f(x) es continua y derivable en R, independientemente del valor real de α, por lo cual le es aplicable el teorema de Rolle a cualquier intervalo finito que se considere.

Considerando el intervalo [-2, 2] se tiene que:

$$f(-2) = (-2)^3 - 12 \cdot (-2) + a = -8 + 24 + a = \underline{16 + a}.$$

$$f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 + a = 8 - 24 + a = \underline{-16 + a}.$$

Como se observa, $f(-2) \neq f(2), \forall a \in R$ y además, $f(-2)$ y $f(2)$ tienen distinto signo; esto significa (según el teorema de Bolzano) que f(x) tiene una raíz real μ en el intervalo [-2, 2], tal que -2 < μ < 2.

Si la función f(x) tuviese otra raíz real σ tal que, por ejemplo, -2 < σ < μ < 2, en el intervalo [-2, 2] se tendría que cumplir que $f(\sigma) = f(\mu) = 0$, con lo cual se le podría aplicar el teorema de Rolle a f(x) en el intervalo [σ, μ], perteneciente al intervalo [-2, 2], lo que implicaría que existiría un valor $c \in (\sigma,\ \mu)$ tal que $f'(c) = 0$ y esto se ha comprobado anteriormente que es imposible, puesto que las soluciones de $f'(x)$ son -2 y 2.

Lo anterior demuestra que

$$\underline{\underline{La\ \ ecuación\ \ x^3 - 12x + a = 0\ \ no\ \ tiene\ \ dos\ \ soluciones\ \ distintas\ \ en\ \ [-2,\ 2]}}$$

****

5º) Discute el sistema $\begin{cases} x-2y+z=-2 \\ -x+y+az=1 \\ 2x+ay+4z=-2 \end{cases}$ dependiente de los valores del parámetro α y resuelve completamente en los casos en que sea posible.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & a & 4 \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & a & 1 \\ 2 & a & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & a & 4 \end{vmatrix}=4-a-4a-2-a^2-8=-a^2-5a-6=0 \;;;\; a^2+5a+6=0 \;;;$$

$$a=\frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{-5\pm 1}{2} \Rightarrow \underline{a_1=-2} \;;;\; \underline{a_2=-3}.$$

$$\underline{\underline{Para \begin{cases} a\neq -2 \\ a\neq -3 \end{cases} \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M'=3=n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ Determinado}}$$

$$Para\ a=-2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2=C_4\} \Rightarrow \underline{Rango\ de\ M'=2}.$$

$$\underline{\underline{Para\ a=-2 \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M'=2<n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ Indeterminado}}$$

$$Para\ a=-3 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ de\ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix}=-2-6-4+4+3+4=11-12=-1\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ M'=3}.$$

$$\underline{\underline{Para\ a=-3 \Rightarrow Rango\ M=2 \;;;\; Rango\ M'=3 \Rightarrow Incompatible}}$$

b)

Resolvemos en primer lugar el caso de compatible determinado por Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-2 & -2 & 1\\ 1 & 1 & a\\ -2 & a & 4\end{vmatrix}}{-(a+2)(a+3)}=\frac{-8+a+4a+2+2a^2+8}{-(a+2)(a+3)}=\frac{2a^2+5a+2}{-(a+2)(a+3)}=\frac{(2a+1)(a+2)}{-(a+2)(a+3)}=\underline{\underline{-\frac{2a+1}{a+3}=x}}.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & a\\ 2 & -2 & 4\end{vmatrix}}{-(a+2)(a+3)}=\frac{4+2-4a-2+2a-8}{-(a+2)(a+3)}=\frac{-2a-4}{-(a+2)(a+3)}=\frac{-2(a+2)}{-(a+2)(a+3)}=\underline{\underline{\frac{2}{a+3}=y}}.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & -2 & -2\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & a & -2\end{vmatrix}}{-(a+2)(a+3)}=\frac{-2+2a-4+4-a+4}{-(a+2)(a+3)}=\frac{a+2}{-(a+2)(a+3)}=\underline{\underline{-\frac{1}{a+3}=z}}.$$

Resolvemos ahora en el caso de α = -2 en cuyo caso el sistema es compatible indeterminado; el sistema resulta $\begin{cases}x-2y+z=-2\\ -x+y-2z=1\\ 2x-2y+4z=-2\end{cases}$. Despreciando la tercera ecuación y haciendo $\underline{z=\lambda}$: $\left.\begin{array}{l}x-2y=-2-\lambda\\ -x+y=1+2\lambda\end{array}\right\}\Rightarrow -y=-1+\lambda$;; $\underline{y=1-\lambda}$;; $x=y-1-2\lambda=1-\lambda-1-2\lambda=-3\lambda$;;

$\underline{x=-3\lambda}$.

$$\underline{\underline{Solución:\begin{cases}x=-3\lambda\\ y=1-\lambda, \quad \forall\lambda\in R\\ z=\lambda\end{cases}}}$$

****