PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JULIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

PROPUESTA A

1º) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 3 + 5\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{cases}$, $\lambda \in R$, $s \equiv 10x + ay + 10 = 0$, calcula el valor de α para que sean: a) Paralelas. b) Perpendiculares.

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (5, 2)$.

Un vector director de $s \equiv y = \frac{-10x-10}{a} = -\frac{10}{a}x - \frac{10}{a}$ es $\overrightarrow{v_s} = (a, -10)$.

Dos rectas son paralelas o perpendiculares cuando lo son, respectivamente, sus vectores directores.

a)

Dos vectores son paralelos cuando sus componentes son proporcionales:

$$\left.\begin{array}{r} \overrightarrow{v_r} = (5, 2) \\ \overrightarrow{v_s} = (a, -10) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{5}{a} = \frac{2}{-10} \Rightarrow -50 = 2a \Rightarrow \underline{a = -25}.$$

$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ son\ paralelas\ para\ a = -25.}$$

$b)$

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{v_r}=(5,2)\\ \overrightarrow{v_s}=(a,-10)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}=0 \Rightarrow (5,2)\cdot(a,-10)=0;\ \ 5a-20=0 \Rightarrow \underline{a=4}.$$

$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ son\ perpendiculares\ para\ a=4}.$$

****

2º) $a)$ Determina todas las soluciones del sistema de ecuaciones: $\begin{cases} sen\,x - \cos y = 1 \\ sen\,x + \cos y = 0 \end{cases}$.

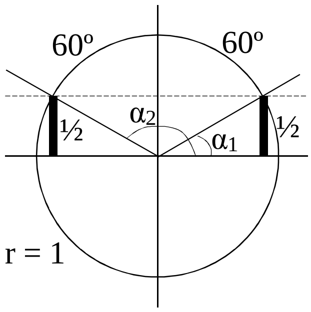
$b)$ Halla: $\int \frac{x}{e^x} \cdot dx$.

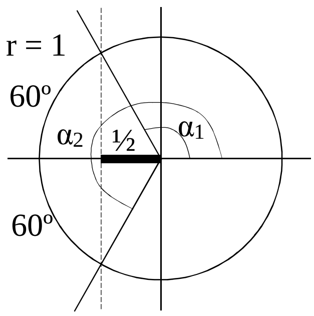
$a)$

$$\left.\begin{array}{r} sen\,x - \cos y = 1 \\ sen\,x + \cos y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\,sen\,x = 1;\ sen\,x = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \pm 60°, k \in N}.$$

$$\left.\begin{array}{r} -sen\,x + \cos y = -1 \\ sen\,x + \cos y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\,cos\,x = -1\ \ ;;\ \ cos\,x = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{x = (2k+1)\pi \pm 60°,\ k \in N}$.





b)

$$\int \frac{x}{e^x} dx = \int x \cdot e^{-x} dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x} \cdot dx \rightarrow v = -e^{-x} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot\ (-e^{-x}) - \int -e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + C =$$

$$= -e^{-x}(x+1) + C.$$

$$\underline{\int \frac{x}{e^x} \cdot dx = -\frac{x+1}{e^x} + C.}$$

****

3º) Sea $g(x) = x - 2L(1+x)$:

$a)$ Determina el dominio de g. $b)$ Halla sus asíntotas.

$c)$ Determina los extremos relativos y estudia la monotonía de g.

$d)$ Dibuja la gráfica de g destacando los elementos hallados anteriormente.

$a)$

Teniendo en cuenta que los números negativos no tienen logaritmo:

$$\underline{D(g) \Rightarrow (-1, +\infty)}.$$

$b)$

Asíntotas horizontales: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a más o menos infinito; son de la forma y = k.

$$y = k = \lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} [x - 2L(1+x)] = \infty - \infty \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} [x - 2L(1+x)] = \infty - \infty \Rightarrow Indet. \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \left[x \cdot \frac{x - 2L(1+x)}{x}\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x \cdot \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{2L(1+x)}{x}\right). \quad (*)$$

Siendo $\lim_{x \to +\infty} \frac{2L(1+x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{x+1}}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x+1} =$

$= \frac{2}{\infty} = 0$, la expresión (*) resulta:

$y = k = \lim_{x \to +\infty} x \cdot \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{2L(1+x)}{x}\right) = \infty \cdot (1 - 0) = \infty \Rightarrow$ **No tiene asíntotas horizontales.**

Asíntotas verticales: son de la forma x = k; son los valores finitos de x para los cuales la función es más infinito o menos infinito. Para x = -1 es f(x) = -∞.

$$\underline{La\ recta\ x = -1\ es\ asíntota\ vertical\ de\ la\ función.}$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo los valores de m y n los siguientes: $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x}$ y $n = \lim_{x \to +\infty} [g(x) - mx]$.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - 2L(x+1)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[1 - \frac{2L(x+1)}{x}\right] = 1.$$

$$n = \lim_{x \to +\infty} [g(x) - mx] = \lim_{x \to +\infty} [x - 2L(x+1) - x] = -2 \lim_{x \to +\infty} (x+1) = -\infty \Rightarrow$$

⇒ **No tiene asíntotas oblicuas**.

c) Determina los extremos relativos y estudia la monotonía de g.

$$g'(x) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-2}{1+x} = \frac{x-1}{1+x} = 0 \Rightarrow x - 1 = 0\,;;\ x = 1.$$

$$g''(x) = \frac{1 \cdot (1+x) - (x-1) \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{1+x-x+1}{(1+x)^2} = \frac{2}{(1+x)^2}.$$

$g''(2) = \frac{2}{(1+2)^2} > 0$ ⇒ Mínimo relativo para x = 1.

$$g(1) = 1 - 2L(1+1) = 1 - 2L2 = 1 - L4 \cong 1 - 1{,}39 = -0{,}39.$$

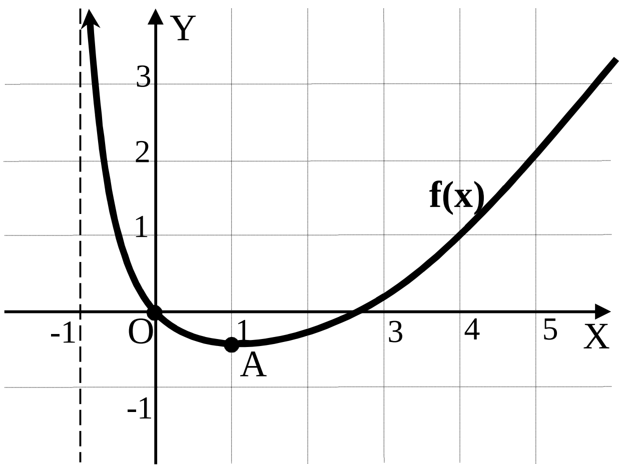
Teniendo en cuenta que la función es continua en su dominio, tiene un mínimo absoluto en A (1, -0,39).

Para x > 1 la primera derivada es positiva y para x < 1 es negativa; teniendo en cuenta el dominio de la función, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Decrecimiento: (-1, 1).} \qquad \underline{Crecimiento: (1, +\infty).}$$

d)

Con los elementos hallados anteriormente y teniendo en cuenta que la función pasa por el origen de coordenadas, puede hacerse un gráfico, aproximado de la función, que es el siguiente:



****

4º) Para el triángulo de vértices A (0, 0, 0), B (1, 7, 1) y C (5, 3, 1):

a) Halla la longitud de la mediana que parte del vértice A.

b) Calcula el área del triángulo ABC.

c) Determina la longitud de la altura que parte del vértice A.

----

a)

El punto medio del lado $\overline{AB}$ es $M_{\overline{AB}}(3,5,1)$.

La longitud de la mediana que parte de A es la distancia entre los puntos $M_{\overline{AB}}$ y A, que es la siguiente:

$$m = \overline{AM_{\overline{AB}}} = \sqrt{(3-0)^2 + (5-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{9+25+1} = \underline{\sqrt{35}\, u}.$$

b)

El área del triángulo ABC es igual que la mitad del módulo del producto vectorial, en valor absoluto, de dos de los vectores que determinan sus lados.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (1,7,1) - (0,0,0) = (1,7,1).$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (5,3,1) - (0,0,0) = (5,3,1).$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 7 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} |7i + 5j + 3k - 35k - 3i - j| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |4i + 4j - 32k| = 2 \cdot |i + j - 8k| = 2 \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-8)^2} =$$

$$= 2 \cdot \sqrt{1+1+64} = 2\sqrt{66}\,.$$

$$\underline{S_{ABC} = 2\sqrt{66}\, u^2}.$$

c)

Los puntos B y C determinan el vector:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (5,3,1) - (1,7,1) = (4,-4,0).$$

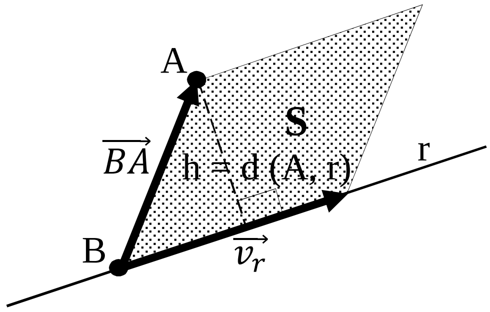
La recta r que pasa por B y C tiene como vector director $\overrightarrow{v_r} = (1,-1,0)$; su expresión dada por unas ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 7 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un dibujo de la situación.

$$\left.\begin{array}{r} S=\left|\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{BA}\right| \\ S=|\overrightarrow{v_r}|\cdot h\end{array}\right\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{BA}\right| = |\overrightarrow{v_r}|\cdot h \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{h = d(A,r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{BA}\right|}{|\overrightarrow{v_r}|}}.$$



Aplicando la fórmula al punto A y a la recta r:

$$d(A,r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{BA}\right|}{|\overrightarrow{v_r}|} = \frac{\left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -7 & -1 \end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0}} = \frac{|i-7k-k+j|}{\sqrt{1+1+0}} = \frac{|i+j-8k|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1^2+1^2+(-8)^2}}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+1+64}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{66}}{\sqrt{2}} = \underline{\sqrt{33}\,u = d(A,r)}.$$

El área del triángulo ABC también puede hallarse de la forma:

$$S_{ABC} = \frac{\overline{BC}\cdot d(A,r)}{2} = \frac{\left|\overline{BC}\right|\cdot\sqrt{33}}{2} = \frac{\sqrt{4^2+(-4)^2+0^2}\cdot\sqrt{33}}{2} = \frac{\sqrt{16+16}\cdot\sqrt{33}}{2} = \frac{\sqrt{32}\cdot\sqrt{33}}{2} = \frac{4\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{33}}{2}.$$

$$\underline{S_{ABC} = 2\sqrt{66}\,u^2}.$$

Solución igual a la obtenida en el apartado b), como cabía esperar.

****

PROPUESTA B

1º) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 3 + 5\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{cases},\ \lambda \in R,\ s \equiv 10x + ay + 10 = 0$, calcula el valor de α para que sean: a) paralelas. b) perpendiculares.

2º) $a)$ Determina todas las soluciones del sistema de ecuaciones: $\begin{cases} sen\, x - \cos y = 1 \\ sen\, x + \cos y = 0 \end{cases}$.

$b)$ Halla: $\int \frac{x}{e^x} \cdot dx$.

(Resueltos en la propuesta A)

3º) Sea $g(x) = \begin{cases} x & si - \frac{\pi}{2} \le x \le 0 \\ \frac{a - \cos x}{sen\, x} & si\ 0 < x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$:

$a)$ Halla el valor de α para el cual g es continua en x = 0.

$b)$ Enuncia el teorema del valor medio de Lagrange.

$c)$ Consideremos α igual al valor hallado en el apartado $a)$ y g la correspondiente función para ese valor de α. Utiliza el teorema del valor medio de Lagrange para justificar que existe c que cumple $0 < c < \frac{\pi}{2}$ y $g'(c) = \frac{2}{\pi}$.

$a)$

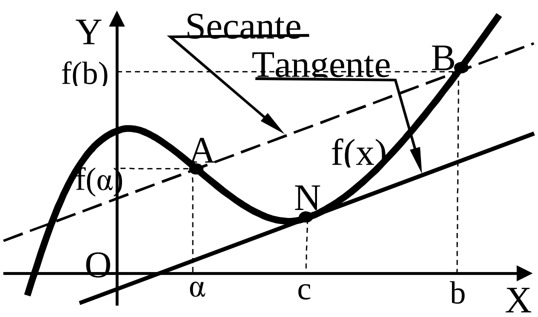
Una función es continua en un punto cuando la función está definida en ese punto, existen sus límites laterales en ese punto y, además, son iguales e igual al valor de la función en ese punto.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0} x = g(0) = 0 \\ \lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{a - \cos x}{sen\, x} = \frac{a-1}{0} \end{array} \right\}.$$

Para que los límites laterales sean iguales tiene que ser, necesariamente, la expresión $\frac{a-1}{0}$ una indeterminación, por lo cual $a - 1 = 0 \Rightarrow \underline{a = 1}$.

$b)$

El teorema del valor medio o de Lagrange, dice: "Si una función f(x) es continua en [α, b] y derivable en (α, b), entonces existe al menos un punto c del intervalo (α, b) tal que la tangente a f(x) en c es paralela a la recta secante que une los puntos [α, f(α)] y [b, f(b)], o sea: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$."



$c)$

Si consideramos la función $g(x) = \frac{a-\cos x}{sen\ x}$ para el valor obtenido $a = 1$, resulta: $g(x) = \frac{1-\cos x}{sen\ x}$, que es continua en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y derivable en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, por lo cual le es aplicable el teorema del valor medio de Lagrange.

$$\left.\begin{array}{l} g(0) = \frac{1-\cos 0}{sen\ 0} = \frac{1-1}{1} = \frac{0}{0} = 0 \quad (*) \\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{sen\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1-0}{1} = 1 \end{array}\right\}.$$

$$(*) \quad \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{sen\ x} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{sen\ x\ (1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-cos^2\ x}{sen\ x\ (1+\cos x)} = \ = \lim_{x\to 0} \frac{sen^2\ x}{sen\ x\ (1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{sen\ x}{1+\cos x} = \frac{0}{1+1} = \frac{0}{2} = 0.$$

$$g'(c) = \frac{g\left(\frac{\pi}{2}\right)-g(0)}{\frac{\pi}{2}-0} = \frac{1-0}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

$\underline{Queda\ demostrado\ que\ existe\ c\ tal\ que\ 0 < c < \frac{\pi}{2}\ siendo\ g'(x) = \frac{2}{\pi}}.$

****

4º) Sean $A=\begin{pmatrix}1 & \beta & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 3 & \beta\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-2\\ 3\\ -\beta/2\end{pmatrix}$:

a) Determina los valores de β para los cuales la matriz A tiene inversa.

b) Discute, según los valores de β, el sistema de ecuaciones lineales $A\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=B$.

c) Resuelve el sistema anterior para β = -2.

----

a)

Una matriz en invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & \beta & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 3 & \beta\end{vmatrix}=\beta+6\beta-6-2\beta^2=0;\ -2\beta^2+7\beta-6=0;$$

$$2\beta^2-7\beta+6=0;\ \beta=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{2\cdot 2}=\frac{7\pm 1}{4}\Rightarrow \beta_1=2, \beta_2=\frac{3}{2}.$$

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall\beta\in R-\left\{2,\tfrac{3}{2}\right\}}.$$

b)

Para la resolución de este apartado aplicamos el teorema de Rouché-Fröbenius.

La matriz ampliada del sistema $\begin{pmatrix}1 & \beta & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 3 & \beta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 3\\ -\beta/2\end{pmatrix}$ es la siguiente:

$$A'=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

Para $\beta=2$ es: $A'=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 2 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ A'\Rightarrow\{C_1, C_2, C_4\}\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 3 & -1\end{vmatrix}=$

$$=-1-12+18+6-9+4=28-22=6\neq 0\Rightarrow Rang\ A'=3.$$

$$\underline{Para\ \beta=2\Rightarrow Rang\ A=2, Rang\ A'=2\ \Rightarrow S.I.}$$

Para $\beta=\frac{3}{2}$ es: $A'=\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2} & 0 & -2\\ 2 & 1 & 2 & 3\\ 3 & 3 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{4}\end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ A'\Rightarrow\{Método\ de\ Gauss\}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \to 2F_1 \\ F_3 \to \frac{4}{3}F_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{F_1 \to \tfrac{1}{2}F_1\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 4F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_2 = F_3\} \Rightarrow Rang\ A' = 2.$$

$$\underline{Para\ \beta = \frac{3}{2} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < n^{o}\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$c)$

Para β = -2 el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} x - 2y = -2 \\ 2x + y + 2z = 3 \\ 3x + 3y - 2z = 1 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado; se resuelve aplicando la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{-2\cdot(-2)^2+7\cdot(-2)-6} = \frac{4-4+12-12}{-8-14-6} = \frac{0}{-28} = 0.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{-28} = \frac{-6-12-2-8}{-28} = \frac{-28}{-28} = 1.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-28} = \frac{1-12-18+6-9+4}{-28} = \frac{11-39}{-28} = \frac{-28}{-28} = 1.$$

Solución: x = 0, y = z = 1.

****