PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

PROPUESTA A

1º) Para cada número real a, la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene por determinante $|A|=(a-1)^3$. A partir de este hecho, halla el determinante de las siguientes matrices:

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 2a & 2 & 2 & 2 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$|B|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(0-1)^3=\underline{-1}.$$

$$|C|=\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=(a-1)^3+0=\underline{(a-1)^3}.$$

Se han tenido en cuenta las siguientes propiedades de los determinantes:

1.- “Si todos los elementos de una línea de una matriz cuadrada se descomponen en dos sumandos, el valor del determinante es igual a la suma de los determinantes que tienen en dicha línea el primero y el segundo sumando, respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial”.

2.- “Si una matriz cuadrada tiene dos filas iguales su determinante es cero”.

$$|D| = \begin{vmatrix} 2a & 2 & 2 & 2 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \underline{2 \cdot (a-1)^3}.$$

Se ha tenido en cuenta la propiedad de los determinantes que dice que “si se multiplica o divide una línea de un determinante por un número distinto de cero, el valor del determinante queda multiplicado o dividido por dicho número”.

****

2º) Sea g la función tal que $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ y su derivada es $g'(x) = \frac{sen\, x}{x}$, $x > 0$.

$i)$ Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de g en el punto $P\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

$ii)$ Sea $h(x) = \frac{g(x)}{x}$. Calcula $h'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

$iii)$ Determina $\int x^2 \cdot g'(x) \cdot dx$.

$i)$

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$$m = g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{sen\,\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \boldsymbol{m = \frac{2}{\pi}}.$$

La expresión de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente viene dada por $y - y_0 = m(x - x_0)$:

$$y - 0 = \frac{2}{\pi} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right);\ \ \pi y = 2x - \pi.$$

$$\underline{Recta\ tangente: t \equiv 2x - \pi y - \pi = 0.}$$

$ii)$

$$h(x) = \frac{g(x)}{x}\ \Rightarrow\ h'(x) = \frac{g'(x) \cdot x - g(x) \cdot 1}{x^2}.$$

$$h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot g'\left(\frac{\pi}{2}\right) - g\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{\pi} - 0}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{\pi^2}{4}} = \underline{\frac{4}{\pi^2}}.$$

$iii)$

$$\int x^2 \cdot g'(x) \cdot dx = \int x^2 \cdot \frac{sen\, x}{x} \cdot dx = \int x \cdot sen\, x \cdot dx\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = sen\, x \cdot dx \rightarrow v = -\cos x \end{array} \right\} \Rightarrow x \cdot (-\cos x) - \int -\cos x \cdot dx =$$

$$= -x \cdot \cos x + \int \cos x \cdot dx = -x \cdot \cos x + sen\, x + C.$$

$$\underline{\int x^2 \cdot g'(x) \cdot dx = sen\, x - x \cdot \cos x + C.}$$

****

3º) Sea $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

i) Determina el dominio de f. ii) Halla sus asíntotas.

iii) Determina los extremos relativos y estudia la monotonía de f.

iv) Dibuja la gráfica de f destacando los elementos hallados anteriormente.

----

i)

El dominio de f es el conjunto de valores reales de x que hacen igual o mayor que cero el valor del radicando: $x^2 - x + 1 \geq 0$.

$$x^2 - x + 1 = 0;\ \ x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \Rightarrow x \notin R \ \Rightarrow \ \boldsymbol{x^2 - x + 1 \geq 0}, \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}.$$

$$\underline{D(f) \Rightarrow R}.$$

ii)

Asíntotas horizontales: son de la forma y = k y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} = \infty.$$

$$\underline{No\ tiene\ asíntotsa\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ verticales}.$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo los valores de m y n los siguientes: $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx]$.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{1} = \boldsymbol{\pm 1}.$$

$$m_1 = -1 \Rightarrow n_1 = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} + x\right) = \infty - \infty \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)}{\sqrt{x^2-x+1}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}-x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Indet. \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{-x+1}{-x}}{\frac{\sqrt{x^2-x+1}-x}{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1} \Rightarrow \boldsymbol{n_1} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}.$$

$$\underline{Asíntota\ oblicua: t_1 \equiv y = -x + \frac{1}{2}.}$$

$$m_2 = 1 \Rightarrow n_2 = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1} - x\right) = \infty - \infty \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2-x+1}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x} = \frac{-\infty}{\infty} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Indet. \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-x+1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-x+1}-x}{x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{-1-0}{\sqrt{1-0+0}+1} \Rightarrow \boldsymbol{n_2} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}.$$

$$\underline{Asíntota\ oblicua: t_2 \equiv y = x - \frac{1}{2}.}$$

$iii)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} = 0;\ \ 2x-1 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}.$$

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right).}$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right).}$$

Para que una función tenga un extremo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada. Para diferenciar los máximos de los mínimos relativos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera derivada, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$$f''(x) = \frac{2\cdot\left(2\sqrt{x^2-x+1}\right)-(2x-1)\cdot\left(2\cdot\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}\right)}{4\cdot(x^2-x+1)} = \frac{2\sqrt{x^2-x+1}-\frac{(2x-1)^2}{2\sqrt{x^2-x+1}}}{2\cdot(x^2-x+1)} =$$

$$= \frac{4\cdot(x^2-x+1)-(2x-1)^2}{4\cdot(x^2-x+1)\cdot\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{4x^2-4x+4-(4x^2-4x+1)}{4\cdot(x^2-x+1)\cdot\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{4x^2-4x+4-4x^2+4x-1}{4\cdot(x^2-x+1)\cdot\sqrt{x^2-x+1}} =$$

$$= \frac{3}{4\cdot(x^2-x+1)\cdot\sqrt{x^2-x+1}}.$$

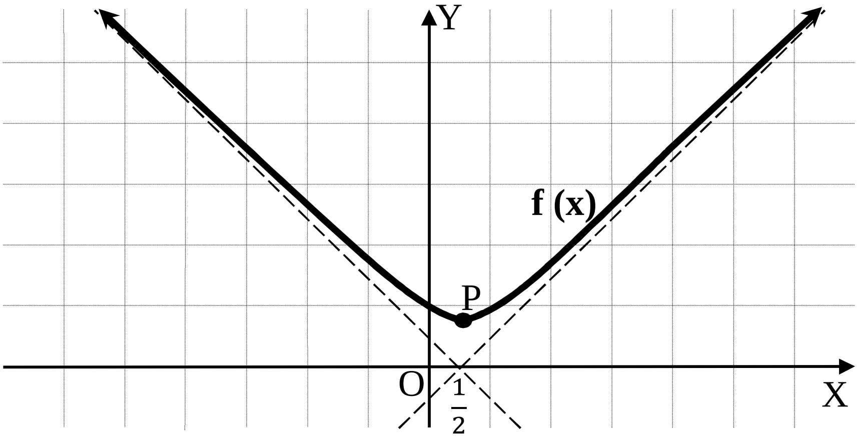
$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1}} = \frac{3}{(1-2+4)\cdot\sqrt{1-2+4}} = \frac{3}{3\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} > 0 \Rightarrow \boldsymbol{Mínimo}.$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1} = \sqrt{\frac{1-2+4}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\underline{Mínimo\ absoluto: P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).}$$

$iv)$

Con la información obtenida y los elementos hallados en los apartados anteriores puede hacerse una representación gráfica, aproximada, de la función, que es la que se indica a continuación:



****

4º) Consideremos el punto $P(6,-1,5)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -t \\ z = 1 - 2t \end{cases}, t \in R$.

$i)$ Halla la ecuación del plano π, perpendicular a r que contiene a P.

$ii)$ Determina el punto Q donde la recta r corta al plano π.

$iii)$ Determina el punto S simétrico de P respecto a la recta r.

$i)$

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r} = (1,-1,-2)$.

Por ser r perpendicular a π, el vector director de r es un vector normal al plano π por lo cual, la expresión implícita del plano π es $\pi \equiv x - y - 2z + D = 0$.

Por contener el plano π al punto $P(6,-1,5)$ tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x - y - 2z + D = 0 \\ P(6,-1,5) \end{array}\right\} \Rightarrow 6 - (-1) - 2 \cdot 5 + D = 0; 6 + 1 - 10 + D = 0;$$

$-3 + D = 0 \Rightarrow \boldsymbol{D = 3}$.

$$\underline{\pi \equiv x - y - 2z + 3 = 0}.$$

$ii)$

El punto Q donde la recta r corta al plano π es la solución del sistema que forman:

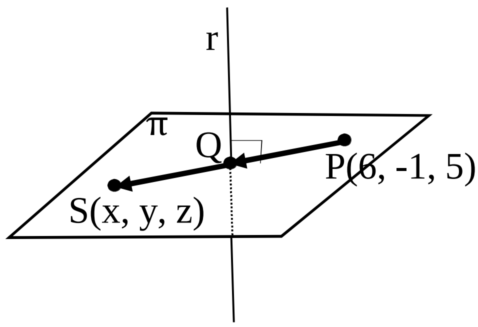
$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x - y - 2z + 3 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow (5 + t) - (-t) - 2(1 - 2t) + 3 = 0;$$

$5 + t + t - 2 + 4t + 3 = 0;\ \ 6t + 6 = 0;\ \ t + 1 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{t = -1}$.

$$r \equiv \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \Rightarrow\ t = -1\ \Rightarrow\ \underline{Q(4,1,3)}.$$

$iii)$

El punto pedido S que, lógicamente pertenece al plano π determina con los puntos P y Q los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QR}$.



Para que el punto $S(x,y,z)$ sea el simétrico de P con respecto a r, los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QR}$ tienen que ser iguales:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QS} \Rightarrow [Q - P] = [S - Q];$$

$$(4, 1, 3) - (6, -1, 5) = [(x, y, z) - (4, 1, 3)];\ (-2, 2, -2) = (x - 4, y - 1, z - 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} x - 4 = -2 \to x = 2 \\ y - 1 = 2 \to y = 3 \\ z - 3 = -2 \to z = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{S(2, 3, 1)}.$$

****

PROPUESTA B

1º) Para cada número real a, la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene por determinante $|A| = (a-1)^3$. A partir de este hecho, halla el determinante de las siguientes matrices:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2a & 2 & 2 & 2 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2º) Sea g la función tal que $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ y su derivada es $g'(x) = \frac{sen\ x}{x}$, $x > 0$.

i) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de g en el punto $P\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

ii) Sea $h(x) = \frac{g(x)}{x}$. Calcula $h'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

iii) Determina $\int x^2 \cdot g'(x) \cdot dx$.

(Resueltos en la propuesta A)

3º) Consideramos la función $f(x) = \begin{cases} a \cdot sen\ x + b \cdot \cos x, & si\ x < \frac{\pi}{2} \\ sen^2 x - a \cdot \cos x, & si\ x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$, siendo a y b números reales arbitrarios:

i) Estudia, según los valores de a y b, la derivabilidad de la función f.

ii) Calcula la función derivada $f'(x)$ en los casos en que $f(x)$ sea derivable en todo su dominio.

----

i)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función f(x) es continua $\forall a, b \in R$. Se trata de determinar los valores de α y b para que sea derivable en el punto crítico $x = \frac{\pi}{2}$.

Para que la función sea continua en $x = \frac{\pi}{2}$ es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(a\cdot sen\,x + b\cdot\cos x) = a\cdot 1 + b\cdot 0 = a \\ \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(sen^2x - a\cdot\cos x) = 1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{a = 1}.$$

La función resulta $f(x) = \begin{cases} sen\,x + b\cdot\cos x, & si\ x < \frac{\pi}{2} \\ sen^2x - \cos x, & si\ x \geq \frac{\pi}{2}\end{cases}$, que es derivable para cualquier valor real de b, excepto para el valor críticos $x = \frac{\pi}{2}$, cuya derivabilidad vamos a forzar determinando el correspondiente valor de b.

Una función es derivable en un punto cuando es continua en ese punto y, además, sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} cos\,x - b\cdot sen\,x, & si\ x < \frac{\pi}{2} \\ 2sen\,x\cdot\cos x + \mathrm{sen}\,x, & si\ x \geq \frac{\pi}{2}\end{cases} \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right)^- = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)^+ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow cos\ \frac{\pi}{2} - b\cdot sen\ \frac{\pi}{2} = 2sen\ \frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{sen}\frac{\pi}{2};\ \ 0 - b\cdot 1 = sen\,\pi + 1;$$

$$-b = 0 + 1 \Rightarrow \underline{b = -1}.$$

$$\underline{La\ función\ es\ derivable\ en\ R\ para\ a = 1\ y\ b = -1}.$$

La función es $f(x) = \begin{cases} sen\,x - \cos x, & si\ x < \frac{\pi}{2} \\ sen^2x - \cos x, & si\ x \geq \frac{\pi}{2}\end{cases}$.

La función derivada es $f'(x) = \begin{cases} \cos x + sen\,x, & si\ x < \frac{\pi}{2} \\ sen\,(2x) + sen\,x, & si\ x \geq \frac{\pi}{2}\end{cases}$.

La derivada de $f'(x)$, que es la segunda derivada, es la siguiente:

$$\underline{f''(x) = \begin{cases} -sen\,x + cos\,x, & si\ x < \frac{\pi}{2} \\ 2\cos(2x) + \cos x, & si\ x \geq \frac{\pi}{2}\end{cases}}.$$

****

4º) Discute el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y+z=2a-1 \\ 2x+y+az=a \\ x+ay+z=1 \end{cases}$, según el valor de a, y resuélvelo cuando sea compatible determinado.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}=1+2a+a-1-a^2-2=-a^2+3a-2=0;$$

$a^2-3a+2=0;\;\; a=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm1}{2} \Rightarrow \boldsymbol{a_1=1, a_2=2}.$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix} a\neq1 \\ a\neq2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ M'=2}.$$

$$\underline{Para\ a=1 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$$Para\ a=2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1=C_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=1+12+2-3-4-2=6\neq0 \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ M'=3}.$$

$$\underline{Para\ a=2 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

Resolvemos por Gauss para $a\neq1$ y $a\neq2$, que es compatible determinado.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2\to F_2-2F_1 \\ F_3\to F_3-F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2a-1 \\ 0 & -1 & a-2 & 2-3a \\ 0 & a-1 & 0 & 2-2a \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{2-2a}{a-1} = \frac{-2(a-1)}{a-1} \Rightarrow \boldsymbol{y = -2}.$$

$$-(-2) + (a-2)z = 2 - 3a \Rightarrow \boldsymbol{z = \frac{-3a}{a-2}}.$$

$$x - 2 + \frac{-3a}{a-2} = 2a - 1;\;\; x = 2a + 1 + \frac{3a}{a-2} = \frac{(2a+1)(a-2)+3a}{a-2} = \frac{2a^2-4a+a-2+3a}{a-2} =$$

$$= \frac{2a^2-2}{a-2} = \boldsymbol{\frac{2(a^2-1)}{a-2} = x}.$$

$$\underline{Solución: x = \frac{2(a^2-1)}{a-2}, y = -2, z = \frac{-3a}{a-2}, \forall a \in R - \{1, 2\}.}$$

****