PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

PROPUESTA A

1º) Sean los puntos $A(1,-1,0)$, $B(2,2,1)$, $C(1,-2,-1)$ y $D(0,-1,2)$.

i) Halle una ecuación de la recta que pasa por A y por B.

ii) ¿Son coplanarios los puntos A, B, C y D?

----

i)

Los puntos A y B determinan el vector: $\overrightarrow{AB}=[B-A]=(1,3,1)$, que es vector director de la recta r pedida.

La recta r dada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas tiene por expresión: $r=\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=-1+3\lambda\\ z=\lambda\end{cases}$.

ii)

Los puntos A, B y C determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{AB}=[B-A]=(1,3,1)$. $\overrightarrow{AC}=[C-A]=(0,-1,-1)$.

Los puntos A, B y C determinan el plano π cuya ecuación general es la siguiente:

$$\pi(A;\ \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv\begin{vmatrix}x-1 & y+1 & z\\ 1 & 3 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix}=0;$$

$-3(x-1)-z+(x-1)+(y+1)=0;\ -2(x-1)+(y+1)-z=0;$

$-2x+2+y+1-z=0\ \Rightarrow\ \pi\equiv 2x-y+z-3=0.$

Para que los puntos A, B, C y D sean coplanarios es condición necesaria que el punto D pertenezca al plano π, o sea, tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r}\pi\equiv 2x-y+z-3=0\\ D(0,-1,2)\end{array}\right\}\Rightarrow 0-(-1)+2-3=0\Rightarrow Si\Rightarrow D\in\pi.$$

$$\underline{Los\ puntos\ A,B,C\ y\ D\ son\ coplanarios}.$$

****

2º) Sea el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} cx+3y-z=-3 \\ x+cy+z=c \\ cx+y+z=1 \end{array}\right\}$.

i) Discuta el sistema anterior para los distintos valores del parámetro c.

ii) Halle la solución o soluciones cuando el sistema sea compatible.

----

i)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} c & 3 & -1 \\ 1 & c & 1 \\ c & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} c & 3 & -1 & -3 \\ 1 & c & 1 & c \\ c & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro c es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} c & 3 & -1 \\ 1 & c & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}=c^2-1+3c+c^2-c-3c=0;\ \ 2c^2-c-1=0;$$

$$c=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{1\pm3}{4}\Rightarrow c_1=-\frac{1}{2}, c_2=1.$$

$$\underline{Para\ \left\{\begin{array}{l} c\neq-\frac{1}{2} \\ c\neq1 \end{array}\right\}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg.\Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ c=-\frac{1}{2}\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 3 & -1 & -3 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M'\Rightarrow\{C_1, C_2, C_4\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 3 & -3 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{4}-3+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}-3=-6+\frac{3}{2}\neq0\Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ c=-\frac{1}{2}\Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3\Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ c=1\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\{F_2=F_3\}\Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ c=1\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg.\Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$

Resolvemos en primer lugar para $\left\{\begin{matrix} c \neq -\frac{1}{2} \\ c \neq 1 \end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix} cx + 3y - z = -3 \\ x + cy + z = c \\ cx + y + z = 1 \end{matrix}\right\}$, por la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 3 & -1 \\ c & c & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2c^2-c-1} = \frac{-3c-c+3+c+3-3c}{2\left(c+\frac{1}{2}\right)(c-1)} = \frac{6-6c}{(2c+1)(c-1)} = \frac{6(1-c)}{(2c+1)(c-1)} = \frac{-6}{2c+1}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} c & -3 & -1 \\ 1 & c & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2c^2-c-1} = \frac{c^2-1-3c+c^2-c+3}{2\left(c+\frac{1}{2}\right)(c-1)} = \frac{2c^2-4c+2}{(2c+1)(c-1)} = \frac{2(c^2-2c+1)}{(2c+1)(c-1)} = \frac{2(c-1)^2}{2c+1} =$$

$$= \frac{2(c-1)}{2c+1}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} c & 3 & -3 \\ 1 & c & c \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2c^2-c-1} = \frac{c^2-3+3c^2+3c^2-c^2-3}{2\left(c+\frac{1}{2}\right)(c-1)} = \frac{6c^2-6}{(2c+1)(c-1)} = \frac{6(c^2-1)}{(2c+1)(c-1)} = \frac{6(c+1)(c-1)}{(2c+1)(c-1)} =$$

$$= \frac{6(c+1)}{2c+1}.$$

$$\underline{Solución: x = \frac{-6}{2c+1}, y = \frac{2(c-1)}{2c+1}, z = \frac{6(c+1)}{2c+1}.}$$

Para $c = 1$ el sistema resulta $\left.\begin{matrix} x + 3y - z = -3 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{matrix}\right\}$, que es compatible indeterminado. Despreciando una de las ecuaciones iguales y haciendo $z = \lambda$:

$$\left.\begin{matrix} x + 3y - z = -3 \\ x + y + z = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + 3y = -3 + \lambda \\ x + y = 1 - \lambda \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x + 3y = -3 + \lambda \\ -x - y = -1 + \lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y = -4 + 2\lambda; \;\; y = -2 + \lambda. \qquad x + (-2 + \lambda) = 1 - \lambda \Rightarrow x = 3 - 2\lambda.$$

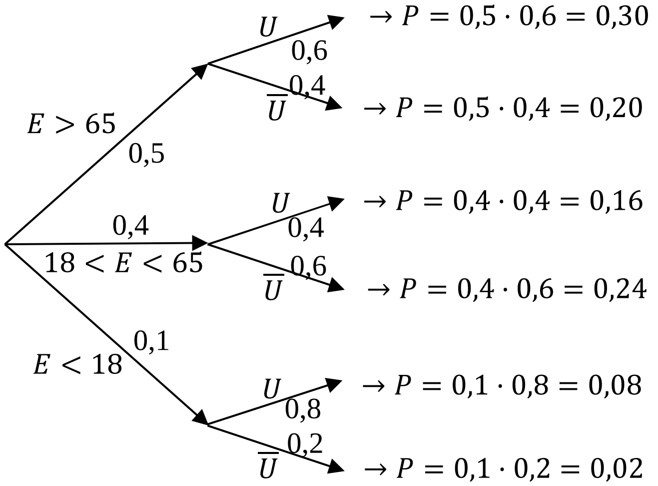
$$\underline{Solución: x = 3 - 2\lambda, y = -2 + \lambda, z = \lambda, \forall \lambda \in R.}$$

****

3º) El 50 % de los habitantes de una localidad tienen más de 65 años y el 10 % tienen menos de 18 años. El 60 % de los mayores de 65 años, así como el 80 % de los menores de 18 y el 40 % del resto de los habitantes, utilizan el complejo de piscinas local.

i) Elegido al azar un habitante de la localidad, calcule la probabilidad de que utilice el complejo de piscinas local.

ii) Elegido al azar un habitante de la localidad que no utiliza el complejo de piscinas local, halle la probabilidad que tenga más de 65 años.



Consideremos las probabilidades $P(V), P(M)\ y\ P(J)$ como mayor de 65 años, entre 18 y 65 años y menor de 18 años, respectivamente.

Igualmente se considera $P(U)\ y\ P(\overline{U})$ las probabilidades de utilización o no utilización del complejo de piscina local, respectivamente.

a)

$$P = P(U) = P(V) \cdot P(U/V) + P(M) \cdot P(U/M) + P(J) \cdot P(U/J) =$$

$$= 0,5 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,8 = 0,30 + 0,16 + 0,08 = \underline{0,54}.$$

b)

$$P = P(\overline{U}/M) = \frac{P(M \cap \overline{U})}{P(\overline{U})} = \frac{P(M) \cdot P(\overline{U}/M)}{P(M) \cdot P(\overline{U}/M) + P(M) \cdot P(\overline{U}/M) + P(J) \cdot P(\overline{U}/J)} =$$

$$= \frac{0,5 \cdot 0,4}{0,5 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,6 + 0,1 \cdot 0,2} = \frac{0,20}{0,20 + 0,24 + 0,02} = \frac{0,20}{0,46} = \underline{0,4348}.$$

****

4º) Sea la función $f(x) = (8 - x^2)^{1/3}$. Para ella estudie:

i) El dominio, la continuidad y las asíntotas.

ii) La derivabilidad, los extremos relativos y la monotonía.

iii) La curvatura y los puntos de inflexión. Dibuje la gráfica de f destacando los elementos anteriores.

----

i)

$$f(x) = (8 - x^2)^{1/3} = \sqrt[3]{8 - x^2}.$$

La raíz cúbica de cualquier número real es un número real, por lo cual:

$$\underline{D(f) \Rightarrow R.}$$

ii) La derivabilidad, los extremos relativos y la monotonía.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas laterales existen y son iguales en ese punto.

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot (8 - x^2)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (-2x) = \frac{-2x}{3} \cdot (8 - x^2)^{-\frac{2}{3}} = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{(8-x^2)^2}} = \frac{-2x \cdot \sqrt[3]{8-x^2}}{3(8-x^2)}.$$

La función no es derivable para $8 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2\sqrt{2}$ y $x_2 = +2\sqrt{2}$.

iii) La curvatura y los puntos de inflexión. Dibuje la gráfica de f destacando los elementos anteriores.

****

PROPUESTA B

1º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

i) Halle, si existe, A^{-1}.

ii) Determine, si existe, la solución X de la ecuación matricial: $A = AXA^{-1} + B$.

----

i)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 1 \Rightarrow \underline{\textit{La matriz A es invertible}}.$$

$$(A/I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - 3F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to -F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 - 2F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}.$$

ii)

$$A = A \cdot X \cdot A^{-1} + B; \;\; A - B = A \cdot X \cdot A^{-1};$$

$$A^{-1} \cdot (A - B) \cdot A = A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot A^{-1} \cdot A; \;\; A^{-1} \cdot (A - B) \cdot A = I \cdot X \cdot I \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot (A - B) \cdot A}.$$

$$X = A^{-1} \cdot (A - B) \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 61 \\ -19 & -33 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} 35 & 61 \\ -19 & -33 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) Dados los vectores $\vec{u} = (2, -3, 5)$, $\vec{v} = (1, 2, -2)$ y $\vec{w} = (2k, -1, k)$,

i) Calcule el valor de k para que los vectores anteriores sean linealmente dependientes.

ii) Compruebe que para $k = 2$ los vectores forman una base del espacio euclídeo tridimensional.

iii) Halle las coordenadas del vector $\vec{a} = (15, -11, 18)$ respecto de la base del apartado anterior.

----

i)

Los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son linealmente dependientes cuando el rango de la matriz que determinan es menor de tres, es decir, que el valor del determinante sea cero.

$$Rango\ \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2k & -1 & k \end{vmatrix} = 4k - 5 + 12k - 20k - 4 + 3k = 0;$$

$-k - 9 = 0;\ \ k + 9 = 0 \Rightarrow k = -9.$

$$\underline{Los\ vectores\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\ son\ linealmente\ dependientes\ para\ k = -9.}$$

ii)

Tres vectores forman una base cuando son linealmente independientes. Según el apartado anterior, los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ forman base $\forall k \in R - \{-9\}$.

$$\underline{Con\ lo\ anterior\ se\ comprueba\ que\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\ forman\ base\ para\ k = 2.}$$

iii)

$\vec{a} = (15, -11, 18) = \beta \cdot \vec{u} + \gamma \cdot \vec{v} + \delta \cdot \vec{w};$

$\beta \cdot (2, -3, 5) + \gamma \cdot (1, 2, -2) + \delta \cdot (4, -1, 2) = (15, -11, 18)\ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2\beta + \gamma + 4\delta = 15 \\ -3\beta + 2\gamma - \delta = -11 \\ 5\beta - 2\gamma + 2\delta = 18 \end{array}\right\}$$. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 1 & 4 \\ -11 & 2 & -1 \\ 18 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{60+88-18-144-30+22}{8+24-5-40-4+6} = \frac{170-192}{38-49} = \frac{-22}{-11} = 2.$$

$$\gamma = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 15 & 4 \\ -3 & -11 & -1 \\ 5 & 18 & 2 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{-44-216-75+220+36+90}{-11} = \frac{346-335}{-11} = \frac{11}{-11} = -1.$$

$$\delta = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 15 \\ -3 & 2 & -11 \\ 5 & -2 & 18 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{72+90-55-150-44+54}{-11} = \frac{216-249}{-11} = \frac{-33}{-11} = 3.$$

$$\underline{\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v} + 3 \cdot \vec{w}}.$$

****

3º) El 50 % de los habitantes de una localidad tienen más de 65 años y el 10 % tienen menos de 18 años. El 60 % de los mayores de 65 años, así como el 80 % de los menores de 18 y el 40 % del resto de los habitantes, utilizan el complejo de piscinas local.

i) Elegido al azar un habitante de la localidad, calcule la probabilidad de que utilice el complejo de piscinas local.

ii) Elegido al azar un habitante de la localidad que no utiliza el complejo de piscinas local, halle la probabilidad que tenga más de 65 años.

(Resuelto en la opción A)

4º) Sea la función $f(x) = (8 - x^2)^{1/3}$. Para ella estudie:

i) El dominio, la continuidad y las asíntotas.

ii) La derivabilidad, los extremos relativos y la monotonía.

iii) La curvatura y los puntos de inflexión. Dibuje la gráfica de f destacando los elementos anteriores.

(Resuelto en la opción A)

****