PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JULIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas. Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

OPCIÓN A

1º) Sea I la matriz identidad de orden 2 y las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

$a)$ Calcule, si existe, la matriz inversa de A.

$b)$ Halle las matrices X e Y que son soluciones del sistema: $\left.\begin{matrix}AX+BY=3I\\ AX-BY=I\end{matrix}\right\}$.

$a)$

La inversa de A se obtiene por la adjunta de la traspuesta: $A^{-1}=\frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|}$.

$|A|=\begin{vmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1.$ $A^t=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{pmatrix}.$ $Adj. de\ A^t=\begin{pmatrix}1 & -6\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$

$A^{-1}=\frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} \Rightarrow A^{-1}=\frac{\begin{pmatrix}1 & -6\\ 0 & 1\end{pmatrix}}{1}.$

$$\underline{A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -6\\ 0 & 1\end{pmatrix}}.$$

$b)$

$\left.\begin{matrix}AX+BY=3I\\ AX-BY=I\end{matrix}\right\} \Rightarrow 2AX=4I;\ \ AX=2I;\ \ X=2I\cdot A^{-1} \Rightarrow \underline{X=\begin{pmatrix}2 & -12\\ 0 & 2\end{pmatrix}}.$

$$\left.\begin{array}{r} AX + BY = 3I \\ -AX + BY = -I \end{array}\right\} \Rightarrow 2BY = 2I;\ \ BY = I;\ \ Y = B^{-1}.$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1. \quad B^t = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad Adj. de\ B^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B^{-1} = \frac{Adj.\ de\ B^t}{|B|} \Rightarrow B^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.}$$

****

2º) Sea la función $f(x) = 2 - \cos x - 3x$.

a) Discute, si existen, las asíntotas oblicuas de f.

b) Calcule $I = \int f(x) \cdot \cos x \cdot dx$.

c) Demuestre que la función $f(x)$ solo corta una vez el eje horizontal.
Nota: Puede ser útil el teorema de Rolle.

----

a)

Las asíntotas oblicuas son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ y } n = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right].$$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \cos x - 3x}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2}{x} - \frac{\cos x}{x} - 3\right) = 0 - 0 - 3 = -3.$$

$$n = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right] = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2 - \cos x - 3x}{x} + 3\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \cos x - 3x + 3x}{x} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \cos x}{x} = 0.$$

$\underline{La\ recta\ y = -3x\ es\ asíntota\ oblicua\ de\ la\ función.}$

b)

$$I = \int f(x) \cdot \cos x \cdot dx = \int (2 - \cos x - 3x) \cdot \cos x \cdot dx =$$

$$= \int (2 \cos x - cos^2 x - 3x \cdot \cos x) \cdot dx =$$

$$= 2 \int \cos x \cdot dx - \int cos^2 x \cdot dx - 3 \int \mathrm{x} \cdot \cos x \cdot dx = 2I_1 - I_2 - 3I_3. \quad (*)$$

$$I_1 = \int \cos x \cdot dx = sen\ x + C_1.$$

$$I_2 = \int cos^2\, x \cdot dx = \int \frac{1 + \cos\,(2x)}{2} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int [1 + \cos(2x)] \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot \int \cos(2x) \cdot dx \Rightarrow \begin{Bmatrix} 2x = t \\ dx = \frac{1}{2}dt \end{Bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int \cos t \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot sen\ t + C_2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \cdot sen\ (2x) + C_2 = \frac{1}{4}[2x + sen\ (2x)] + C_2 = I_2.$$

$$I_3 = \int \mathrm{x} \cdot \cos x \cdot dx \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = u \to dx = du \\ \cos x \cdot dx = dv \to v = sen\ x \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x \cdot sen\, x - \int sen\, x \cdot dx = x \cdot sen\, x + \cos x + C_3 = I_3.$

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión (*):

$$I = 2I_1 - I_2 - 3I_3 = 2sen\, x - \frac{1}{4}[2x + sen\,(2x)] - 3(x \cdot sen\, x + \cos x) + C.$$

$$\underline{I = \int f(x) \cdot \cos x \cdot dx = 2sen\, x - \frac{1}{4}[2x + sen\,(2x)] - 3(x \cdot sen\, x + \cos x) + C.}$$

$c)$

El teorema de Bolzano dice que “si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$”.

La función $f(x) = 2 - \cos x - 3x$ es continua en R, por ser la suma de tres funciones continuas, por lo cual le es aplicable el teorema de Bolzano a cualquier intervalo finito que se considere.

Considerando, por ejemplo, el intervalo $[0, \pi]$:

$f(0) = 2 - \cos 0 - 3 \cdot 0 = 2 - 1 - 0 = 1 > 0.$

$f(\pi) = 2 - \cos \pi - 3 \cdot \pi = 2 - (-1) - 3\pi = 3 - 3\pi < 0.$

Lo anterior demuestra que la función $f(x)$ tiene, por lo menos, una raíz real en el intervalo considerado.

Se nos pide demostrar que esa raíz es única. Se empleará el método de reducción al absurdo.

Si tuviera otra raíz le sería aplicable el teorema de Rolle a la función en el intervalo considerado.

El teorema de Rolle dice que “si una función $f(x)$ en continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), con $a, b \in R$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c, $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$”.

$f'(x) = sen\, x - 3 \neq 0, \forall x \in R.$

Al no existir ningún valor real que anule la derivada:

$$\underline{Queda\ demostrado\ que\ f(x)\ solamente\ tiene\ una\ raíz\ real.}$$

****

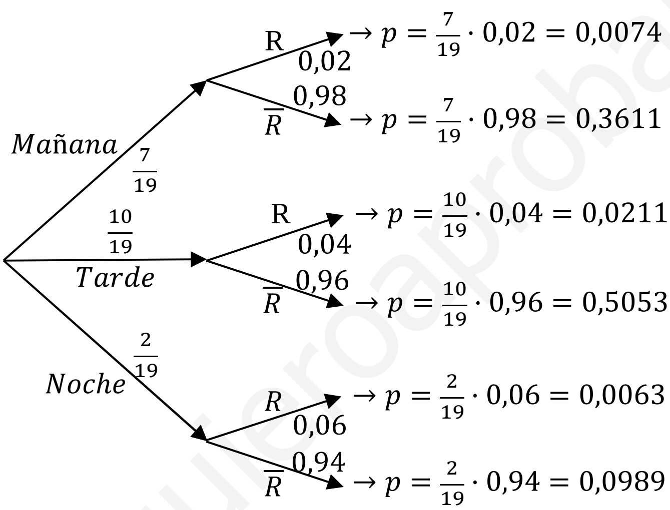
3º) El número de vuelos que llegan a un aeropuerto por la mañana es de 140, por la tarde, 200, y por la noche, 40. El porcentaje de vuelos que se retrasan por la mañana es del 2 %, por la tarde de 4 % y por la noche, de un 6 %.

a) Calcule la probabilidad de que no se retrase un vuelo con destino a ese aeropuerto.

b) Si el vuelo llegó con retraso a este aeropuerto, ¿cuál es la probabilidad de que fuera un vuelo de la tarde?

$$Número\ total\ de\ vuelos: 140 + 200 + 40 = 380.$$

$$P(M) = \frac{140}{380} = \frac{7}{19};\ \ P(T) = \frac{200}{380} = \frac{10}{19};\ \ P(N) = \frac{40}{380} = \frac{2}{19}.$$



a)

$$P = P(\overline{R}) = P(M) \cdot P(\overline{R}/M) + P(T) \cdot P(\overline{R}/T) + P(N) \cdot P(\overline{R}/N) =$$

$$= \frac{7}{19} \cdot 0{,}98 + \frac{10}{19} \cdot 0{,}96 + \frac{2}{19} \cdot 0{,}06 = 0{,}3611 + 0{,}5053 + 0{,}0063 = \underline{0{,}8727}.$$

b)

$$P = P(T/R) = \frac{P(T\cap R)}{P(R)} = \frac{P(T)\cdot P(R/T)}{P(A)\cdot P(R/A)+P(B)\cdot P(R/B)+P(C)\cdot P(R/C)} =$$

$$= \frac{\frac{10}{19}\cdot 0{,}04}{1-P(\overline{R})} = \frac{0{,}0211}{1-0{,}8727} = \frac{0{,}0211}{0{,}1273} = \underline{0{,}1658}.$$

****

4º) Considere las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ x - y - 5z = -7 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$, con $t \in R$.

$a)$ Determine la posición relativa de las rectas $r\ y\ s$.

$b)$ Halle, utilizando parámetros, todos los vectores perpendiculares a r.

$a)$

La expresión de s mediante unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$s \equiv \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0};\ \begin{cases} x - 3 = 2y - 2 \\ z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x - 2y = 1 \\ z = 1 \end{cases}.$$

Las rectas r y s determinan el sistema $\begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ x - y - 5z = -7 \\ x - 2y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & -7 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de $M\ y\ M'$ pueden presentarse los siguientes casos:

$1 - Rang\ M = 3, Rang\ M' = 4 \Rightarrow Se\ cruzan.$

$2 - Rang\ M = 3, Rang\ M' = 3 \Rightarrow Se\ cortan.$

$3 - Rang\ M = 2, Rang\ M' = 3 \Rightarrow Son\ paralelas.$

$4 - Rang\ M = 2, Rang\ M' = 2 \Rightarrow Son\ coincidentes.$

$$Rango\ de\ M \Rightarrow \{F_1, F_2, F_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 + 5 + 2 - 10 =$$

$$= 7 - 14 = -7 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = 3.$$

$$Rang\ M' \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & -7 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -14 \\ 0 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_2 = -7F_4\} \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cortan}.$$

$b)$

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ x - y - 5z = -7 \end{cases} \Rightarrow y = \lambda \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + 2z = 7 + \lambda \\ x - 5z = -7 + \lambda \end{cases} \right\} \left.\begin{matrix} x + 2z = 7 + \lambda \\ -x + 5z = 7 - \lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7z = 14; \;\; z = 2. \qquad x + 4 = 7 + \lambda; \;\; x = 3 + \lambda \;\; \Rightarrow \;\; r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases}.$$

El haz de planos perpendiculares a r es $\beta \equiv x + y + D = 0$.

La expresión de β por unas ecuaciones paramétricas es: $\beta \equiv \begin{cases} x = -y - D \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}.$

Dos vectores directores de β son $\overrightarrow{v_1} = (-1, 1, 0)$ y $\overrightarrow{v_2} = (0, 0, 1)$.

Los vectores linealmente dependientes de los vectores $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ son de la forma: $\overrightarrow{\varpi} = m \cdot \overrightarrow{v_1} + n \cdot \overrightarrow{v_2}, \forall m, n \in R$.

$$\overrightarrow{\varpi} = m \cdot (-1, 1, 0) + n \cdot (0, 0, 1) = (-m, m, 0) + (0, 0, n) = (-m, m, n).$$

$$\underline{Todos\ los\ vectores\ normales\ a\ r\ son\ de\ la\ forma\ \overrightarrow{\varpi} = (-m, m, n), \forall m, n \in R}.$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Determine el rango de la matriz $M=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}=2$, calcule $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ a & b & c \\ a-4 & b-4 & c-4 \end{vmatrix}$.

----

a)

$$|M|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}=-8+6-4+6=0 \Rightarrow \underline{Rang\ M=2}.$$

b)

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ a & b & c \\ a-4 & b-4 & c-4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ a & b & c \\ -4 & -4 & -4 \end{vmatrix}=$$

$$=0+(-1)\cdot 2\cdot(-2)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ a & b & c \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}=4\cdot 2=8.$$

$$\underline{\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ a & b & c \\ a-4 & b-4 & c-4 \end{vmatrix}=8.}$$

En la realización del ejercicio se han utilizado las siguientes propiedades de los determinantes:

1ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en dicha línea el primero y el segundo sumandos, respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial.

2ª.- Si un determinante tiene dos líneas paralelas iguales o proporcionales su valor es cero.

3ª.- Si se intercambian dos líneas de un determinante su valor cambia de signo.

4ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se multiplican o dividen por un número su valor queda multiplicado o dividido por dicho número.

****

2º) a) Halle, si existe, el valor de a para el cual se cumple que:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{9x^2+ax+1}-(3x-1)\right]=2.$$

b) Determine, si existe, $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+12x+1}\right)'$, donde $\left(\sqrt{9x^2+12x+1}\right)'$ representa la derivada de $\sqrt{9x^2+12x+1}$.

----

a)

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{9x^2+ax+1}-(3x-1)\right]=\infty-\infty\Rightarrow Indet.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\sqrt{9x^2+ax+1}-(3x-1)\right]\cdot\left[\sqrt{9x^2+ax+1}+(3x-1)\right]}{\sqrt{9x^2+ax+1}+(3x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+ax+1}\right)^2-(3x-1)^2}{\sqrt{9x^2+ax+1}+(3x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2+ax+1-(9x^2-6x+1)}{\sqrt{9x^2+ax+1}+3x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2+ax+1-9x^2+6x-1}{\sqrt{9x^2+ax+1}+3x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+6x}{\sqrt{9x^2+ax+1}+3x-1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+6)x}{\sqrt{9x^2+ax+1}+3x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{(a+6)x}{x}}{\frac{\sqrt{9x^2+ax+1}+3x-1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a+6}{\frac{\sqrt{9x^2+ax+1}}{x}+3-\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a+6}{\sqrt{\frac{9x^2+ax+1}{x^2}}+3-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a+6}{\sqrt{9+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}}+3-\frac{1}{x}}=\frac{a+6}{\sqrt{9+\frac{a}{\infty}+\frac{1}{\infty}}+3-\frac{1}{\infty}}=\frac{a+6}{\sqrt{9+0+0}+3-0}=$$

$$=\frac{a+6}{\sqrt{9}+3}=\frac{a+6}{3+3}=\frac{a+6}{6}=2;\ \ a+6=12\ \Rightarrow\ \underline{a=6}.$$

b)

$$\left(\sqrt{9x^2+12x+1}\right)'=\frac{18x+12}{2\sqrt{9x^2+12x+1}}=\frac{9x+6}{\sqrt{9x^2+12x+1}}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+12x+1}\right)'=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x+6}{\sqrt{9x^2+12x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{9x+6}{x}}{\frac{\sqrt{9x^2+ax+1}}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{9+\frac{6}{x}}{\sqrt{\frac{9x^2+ax+1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9+\frac{6}{x}}{\sqrt{9+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{9+\frac{6}{\infty}}{\sqrt{9+\frac{a}{\infty}+\frac{1}{\infty}}}=\frac{9+0}{\sqrt{9+0+0}}=\frac{9}{\sqrt{9}}=\frac{9}{3}=3.$$

$$\underline{\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+12x+1}\right)'=3.}$$

****

3º) El número de vuelos que llegan a un aeropuerto por la mañana es de 140, por la tarde , 200, y por la noche, 40. El porcentaje de vuelos que se retrasan por la mañana es del 2 %, por la tarde de 4 % y por la noche, de un 6 %.

a) Calcule la probabilidad de que no se retrase un vuelo con destino a ese aeropuerto.

b) Si el vuelo llegó con retraso a este aeropuerto, ¿cuál es la probabilidad de que fuera un vuelo de la tarde?

4º) Considere las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ x - y - 5z = -7 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$, con $t \in R$.

a) Determine la posición relativa de las rectas $r\ y\ s$.

b) Halle, utilizando parámetros, todos los vectores perpendiculares a r.

(RESUELTOS EN LA OPCIÓN A)

****