PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas. Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

OPCIÓN A

1º) Sean los vectores $\vec{u} = (-1, 4, 8)\ y\ \vec{v} = (1, 2, -2)$.

a) Demuestre que el ángulo entre los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ es mayor de 90°.

b) Calcule un vector perpendicular a $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ que tenga de módulo 1.

----

a)

Por la definición de producto escalar de dos vectores:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{(-1,4,8) \cdot (1,2,-2)}{\sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 8^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} =$$

$$= \frac{-1+8-16}{\sqrt{1+16+64} \cdot \sqrt{1+4+4}} = \frac{-9}{\sqrt{81} \cdot \sqrt{9}} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \underline{90° < \alpha < 180°, como\ se\ debía\ demostrar}.$$

b)

Por definición de producto vectorial, el producto vectorial de dos vectores es otro vector que es perpendicular a los dos vectores que se multiplican.

Un vector $\vec{w}$ perpendicular a $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los dos vectores:

$$\overrightarrow{w'} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -8i + 8j - 2k - 4k - 16i - 2j =$$

$= -24i + 6j - 6k \;\Rightarrow\; \vec{w} = 4i - j + k.$

El vector pedido, $\vec{m}$, es un vector linealmente dependiente de $\vec{w}$ y de módulo la unidad:

$$\vec{m} = \frac{4i-j+k}{\sqrt{4^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{4i-j+k}{\sqrt{16+1+1}} = \frac{4i-j+k}{\sqrt{18}} = \frac{4i-j+k}{3\sqrt{2}}.$$

$$\underline{\overrightarrow{m_1} = \frac{4}{3\sqrt{2}}i - \frac{1}{3\sqrt{2}}j + \frac{1}{3\sqrt{2}}k} \;\; y \;\; \underline{\overrightarrow{m_2} = -\frac{4}{3\sqrt{2}}i + \frac{1}{3\sqrt{2}}j - \frac{1}{3\sqrt{2}}k}.$$

****

2º) En una empresa frutícola, la producción por árbol sigue una distribución normal de media 54,3 kg y desviación típica 6,5 kg.

a) ¿Cuál es el porcentaje de árboles que producen más de 57 kg?

b) ¿Qué porcentaje de árboles producen entre 50 y 57 kg?

c) Si se escoge al azar un árbol que está dentro del 70 % de los árboles que menos producen, ¿a lo sumo, cuántos kilogramos debería producir?

----

a)

$Datos$: $\mu = 54{,}3;\ \ \sigma = 6{,}5.$ $\qquad X \to N(\mu;\ \sigma) = N(54{,}3;\ 6{,}5).$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-54{,}3}{6{,}5}$.

$$P = P(X \geq 57) = P\left(Z \geq \frac{57-54{,}3}{6{,}5}\right) = P\left(Z \geq \frac{2{,}7}{6{,}5}\right) = P(Z \geq 0{,}42) =$$

$$= 1 - P(Z < 0{,}42) = 1 - 0{,}6628 = \underline{0{,}3372}.$$

$$\underline{Produce n\ más\ de\ 57\ kg\ el\ 33{,}72\ \%\ de\ los\ árboles.}$$

b)

$$P = P(50 \leq Z \leq 57) = P\left(\frac{50-54{,}3}{6{,}5} \leq Z \leq \frac{57-54{,}3}{6{,}5}\right) = P\left(\frac{-4{,}3}{6{,}5} \leq Z \leq \frac{2{,}7}{6{,}5}\right) =$$

$$= P(-0{,}66 \leq Z \leq 0{,}42) = P(Z < 0{,}42) - [1 - P(Z < 0{,}66)] =$$

$$= P(Z < 0{,}42) - 1 + P(Z < 0{,}66) = 0{,}6628 - 1 + 0{,}7454 = 1{,}4082 - 1 =$$

$$= \underline{0{,}4082}.$$

$$\underline{Producen\ entre\ 50\ y\ 57\ kg\ el\ 40{,}82\ \%\ de\ los\ árboles.}$$

c)

$$p(\overline{X} \leq Pr) = 0{,}70 \Rightarrow p\left(\frac{\overline{X}-54{,}3}{6{,}5} \geq \frac{Pr-54{,}3}{6{,}5}\right) = 0{,}70.$$

Mirando en el interior de la tabla dada de las áreas limitadas por la curva $N(0, 1)$, con el valor de 0,70 se obtiene: 0,525.

$$\frac{Pr-54{,}3}{6{,}5} = 0{,}525;\ \ Pr - 54{,}3 = 3{,}41\ \Rightarrow Pr = 3{,}41 + 54{,}3 = 57{,}71.$$

$$\underline{Deberá\ producir\ al\ menos\ 57{,}71\ kgs.}$$

****

3º) Sea la función $f(x) = x \cdot e^{-ax}$:

a) Calcule, según los valores de a, las asíntotas de la función $f(x)$.

b) Halle el valor de a para que f tenga en $x = 1$ un extremo relativo. ¿Es un máximo o un mínimo relativo?

----

a)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$a < 0$:

$$k = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (xe^{-ax}) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{ax}} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{a \cdot e^{ax}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$k = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x \cdot e^{-ax}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{ax}} = +\infty \ (no\ hay\ asíntota).$$

$a > 0$:

$$k = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x \cdot e^{-ax}) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{ax}} = -\infty \ (no\ hay\ asíntota).$$

$$k = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (xe^{-ax}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{ax}} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{a \cdot e^{ax}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\underline{Para\ a < 0\ y\ a > 0\ el\ eje\ OX\ es\ asíntota\ horizontal}.$$

$a = 0$:

La función resulta $f(x) = x$

$$\underline{Para\ a = 0\ la\ función\ misma\ es\ la\ asíntota\ oblícua\ y = x}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$f(x) = x \cdot e^{-ax} = \frac{x}{e^{ax}} \Rightarrow e^{ax} \neq 0, \forall a, x \in R.$$

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ verticales}.$$

$b)$

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo, máximo o mínimo, es que se anule su primera derivada:

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-ax} - x \cdot a \cdot e^{-ax} = e^{-ax}(1 - ax).$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow e^{-a}(1 - a) = 0;\;\; e^{-a} \neq 0, \forall a \in R \Rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow a = 1.$$

$$\underline{f(x)\ tiene\ un\ extremo\ relativo\ en\ x = 1\ para\ a = 1}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera derivada se trate de un mínimo y, si es negativa de un máximo.

Para $a = 1$ es $f'(x) = e^{-x}(1 - x)$.

$$f''(x) = -1 \cdot e^{-x} \cdot (1 - x) - 1 \cdot e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x} \cdot (1 - x) - e^{-x} =$$

$$= -e^{-x} \cdot (1 - x + 1) = -e^{-x} \cdot (2 - x).$$

$$f''(1) = -e^{-1} \cdot (2 - 1) = -e^{-1} \cdot 1 = -e^{-1} = -\frac{1}{e} < 0.$$

$$\underline{El\ extremo\ relativo\ que\ tiene\ f(x)\ para\ x = 1\ e\ y = 1\ es\ un\ máximo}.$$

****

4º) Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} cx+y-2z=6 \\ cx-2y+z=0 \\ -2x+y+cz=-6 \end{cases}$:

a) Discuta el sistema anterior para los distintos valores del parámetro c.

b) Halle la solución o soluciones, si existen, cuando el parámetro c es 1.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} c & 1 & -2 \\ c & -2 & 1 \\ -2 & 1 & c \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} c & 1 & -2 & 6 \\ c & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & c & -6 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro c es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} c & 1 & -2 \\ c & -2 & 1 \\ -2 & 1 & c \end{vmatrix}=-2c^2-2c-2+8-c-c^2=-3c^2-3c+6=0;$$

$c^2+c-2=0;\ \ c=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow c_1=-2, c_2=1.$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} c\neq -2 \\ c\neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ c=-2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 6 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 & 6 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -6 \end{vmatrix}=-24-12-24-12=-72\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ c=-2 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ c=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 + 2F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2=-F_3\} \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ c=1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$

Para $c = 1$ el sistema resulta: $\begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ x - 2y + z = 0 \\ -2x + y + z = -6 \end{cases}$, que es compatible indeterminado. Despreciando una de las ecuaciones (tercera) y haciendo $z = \lambda$:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 6 + 2\lambda \\ x - 2y = -\lambda \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x + y = 6 + 2\lambda \\ -x + 2y = \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 3y = 6 + 3\lambda; \;\; y = 2 + \lambda.$$

$$x + (2 + \lambda) = 6 + 2\lambda; \;\; x = 4 + \lambda.$$

$$\underline{Solución: x = 4 + \lambda, y = 2 + \lambda, z = \lambda, \forall \lambda \in R}.$$

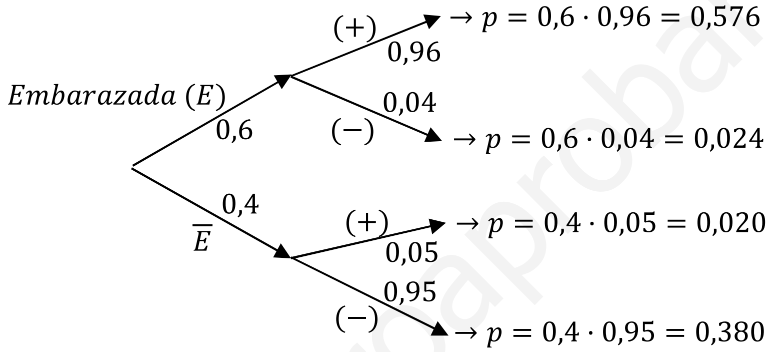
****

OPCIÓN B

1º) Una mujer, que sospecha estar embarazada, acude a la consulta del médico. Al examinarla cuidadosamente, el médico cree que está embarazada con una probabilidad de 0,6. Para confirmar el diagnóstico, el médico encarga un test que da negativo en el 4 % de los casos que la mujer está realmente embarazada. Mientras que el test da positivo en el 5 % de los casos en los que mujer no está embarazada. Calcule la probabilidad de que:

a) El test dé positivo.

b) La mujer esté embarazada sabiendo que el test da positivo.



a)

$$P = P(+) = P(E \cap +) + P(\overline{E} \cap +) = P(E) \cdot P(+/E) + P(\overline{E}) \cdot P(+/\overline{E}) =$$

$$= 0{,}6 \cdot 0{,}96 + 0{,}4 \cdot 0{,}05 = 0{,}576 + 0{,}020 = \underline{0{,}596}.$$

b)

$$P = P(E/+) = \frac{P(E \cap +)}{P(+)} = \frac{P(E) \cdot P(+/E)}{P(E) \cdot P(+/E) + P(\overline{E}) \cdot P(+/\overline{E})} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}96}{0{,}6 \cdot 0{,}96 + 0{,}4 \cdot 0{,}05} =$$

$$= \frac{0{,}576}{0{,}576 + 0{,}020} = \frac{0{,}576}{0{,}596} = \frac{576}{596} = \underline{\frac{144}{149} = 0{,}9664}.$$

****

2º) Sea el punto $P(1, 2, -2)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$:

a) Determine la ecuación del plano que contiene al punto P y es perpendicular a la recta r.

b) Determine el punto A de r más próximo a P.

c) Halle la recta r' simétrica de r respecto al punto P.

----

a)

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r} = (-1, 1, 2)$.

Un vector normal del plano π pedido, por ser perpendicular a la recta r, es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector director de la recta: $\vec{n} = (1, -1, -2)$.

La ecuación general del plano es $\pi \equiv x - y - 2z + D = 0$.

Por contener el plano π al punto $P(1, 2, -2)$ debe satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x - y - 2z + D = 0 \\ P(1, 2, -2) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 - 2 - 2 \cdot (-2) + D = 0;\ -1 + 4 + D = 0 \Rightarrow$$

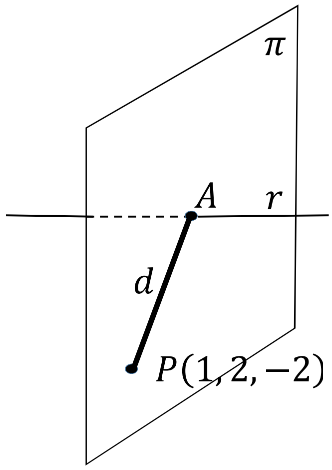
$\Rightarrow D = -3.$

$$\underline{\pi \equiv x - y - 2z - 3 = 0}.$$

b)

El punto A es la intersección de la recta r con el plano π, que es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x - y - 2z - 3 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow$$



$\Rightarrow (2 - \lambda) - (1 + \lambda) - 2 \cdot 2\lambda - 3 = 0;$

$2 - \lambda - 1 - \lambda - 4\lambda - 3 = 0;\ -2 - 6\lambda = 0;$

$1 + 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{3}.$

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{3} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \\ y = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ z = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A\left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)}.$$

$c)$

Dos puntos de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$ son $M(2, 1, 0)$ y $N(1, 2, 2)$.

Los puntos simétricos de M y N con respecto a $P(1, 2, -2)$ son M' y N', respectivamente.

La recta r' pedida es la que pasa por los puntos M' y N'.

$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PM'} \Rightarrow [(1, 2, -2) - (2, 1, 0)] = [(x, y, z) - (1, 2, -2)];$

$$(-1, 1, -2) = (x - 1, y - 2, z + 2) \Rightarrow \left. \begin{cases} x - 1 = -1 \to x = 0 \\ y - 2 = 1 \to y = 3 \\ z + 2 = -2 \to z = -4 \end{cases} \right\} \Rightarrow M'(0, 3, -4).$$

$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{PN'} \Rightarrow [(1, 2, -2) - (1, 2, 2)] = [(x, y, z) - (1, 2, -2)];$

$$(0, 0, -4) = (x - 1, y - 2, z + 2) \Rightarrow \left. \begin{cases} x - 1 = 0 \to x = 1 \\ y - 2 = 0 \to y = 2 \\ z + 2 = -4 \to z = -6 \end{cases} \right\} \Rightarrow N'(1, 2, -6).$$

$\overrightarrow{v_{r'}} = \overrightarrow{M'N'} = [(1, 2, -6) - (0, 3, -4)] = (1, -1, -2)$

$$\underline{r' \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = -4 - 2\lambda \end{cases}}.$$

****

3º) Sea la función $f(x) = x \cdot e^{-ax}$:

a) Calcule, según los valores de a, las asíntotas de la función $f(x)$.

b) Halle el valor de a para que f tenga en $x = 1$ un extremo relativo. ¿Es un máximo o un mínimo relativo?

4º) Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} cx + y - 2z = 6 \\ cx - 2y + z = 0 \\ -2x + y + cz = -6 \end{cases}$:

a) Discuta el sistema anterior para los distintos valores del parámetro c.

b) Halle la solución o soluciones, si existen, cuando el parámetro c es 1.

(RESUELTOS EN LA OPCIÓN A

****