PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JULIO – 2019

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas. Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

OPCIÓN A

1º) Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, de modo que los vectores son unitarios y forman entre sí ángulos de 45°. Dados los vectores $\vec{u} = e_1 + e_2$ y $\vec{v} = e_1 - e_2 + e_3$:

a) Calcula el módulo de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) Calcula el coseno del ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

----

a)

$$|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = (e_1 + e_2) \cdot (e_1 + e_2) = (e_1)^2 + e_1 \cdot e_2 + e_2 \cdot e_1 + (e_2)^2 =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \cos 0° + 1 \cdot 1 \cdot \cos 45° + 1 \cdot 1 \cdot \cos 45° + 1 \cdot 1 \cdot \cos 0° =$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 2 + \sqrt{2} \Rightarrow \underline{|\vec{u}| = \sqrt{2 + \sqrt{2}}\ unidades}.$$

$$|\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = (e_1 - e_2 + e_3) \cdot (e_1 - e_2 + e_3) =$$

$$= (e_1)^2 - e_1 \cdot e_2 + e_1 \cdot e_3 - e_2 \cdot e_1 + (e_2)^2 - e_2 \cdot e_3 + e_3 \cdot e_1 - e_3 \cdot e_2 + (e_2)^2 =$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 3 - \sqrt{2} \Rightarrow \underline{|\vec{v}| = \sqrt{3 - \sqrt{2}}\ unidades}.$$

b)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha. \quad (*)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(e_1+e_2)(e_1-e_2+e_3)=$$

$$=(e_1)^2-e_1\cdot e_2+e_1\cdot e_3+e_2\cdot e_1-(e_2)^2+e_2\cdot e_3=$$

$$=1-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}.$$

Sustituyendo en (*) los valores determinados:

$$\sqrt{2}=\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{2}}\cdot\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(2+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{2}{4+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{2(4-\sqrt{2})}{16-2}}=\sqrt{\frac{4-\sqrt{2}}{7}}.$$

$$\underline{\cos\alpha=\sqrt{\frac{4-\sqrt{2}}{7}}.}$$

****

2º) El peso medio según la OMS de un niño de 5 años sigue una distribución normal de media 18,5 kg y desviación típica 2,25 kg. Si se elige un niño al azar, halla el porcentaje de niños:

a) Cuyo peso es superior a 23 kg. b) Cuyo peso está entre 15 y 23 kg.

----

a)

$Datos$: $\mu = 18{,}5;\ \ \sigma = 2{,}25.$

$X \rightarrow N(\mu;\ \sigma) = N(18{,}5;\ 2{,}25).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-18{,}5}{2{,}25}$.

$P = P(X > 23) = P\left(Z > \frac{23-18{,}5}{2{,}25}\right) = P\left(Z > \frac{4{,}5}{2{,}25}\right) = P(Z > 2) =$

$= 1 - P(Z < 2) = 1 - 0{,}9772 = \underline{0{,}0228}.$

b)

$P = P(15 \leq X \leq 23) = P\left(\frac{15-18{,}5}{2{,}25} \leq Z \leq \frac{23-18{,}5}{2{,}25}\right) = P\left(\frac{-3{,}5}{2{,}25} \leq Z \leq \frac{4{,}5}{2{,}25}\right) =$

$= P(-1{,}56 \leq Z \leq 2) = P(Z < 2) - P(Z < -1{,}56) =$

$= P(Z < 2) - [1 - P(Z < 1{,}56)] = P(Z < 2) - 1 + P(Z < 1{,}56) =$

$= 0{,}9772 - 1 + 0{,}9406 = 1{,}9178 - 1 = \underline{0{,}9178}.$

****

3º) Sea la función $f(x)=\frac{|x|}{x^2-1}$:

$a)$ Analiza la continuidad y derivabilidad de la función f.

$b)$ Razona si se puede aplicar, o no, el teorema de Rolle en el intervalo $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. En caso afirmativo, calcula el valor $c\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ a que se refiere el teorema de Rolle.

$c)$ Halla el área encerrada por f y el eje de abscisas en el intervalo $\left[\frac{3}{2},4\right]$.

Teniendo en cuanta que $|x|=\begin{cases}-x & si\ \ x<0\\ x & si\ \ x\geq 0\end{cases}$, la función puede redefinirse de la forma siguiente: $f(x)=\begin{cases}\frac{-x}{x^2-1} & si\ \ x<0\\ \frac{x}{x^2-1} & si\ \ x\geq 0\end{cases}$.

$a)$

El dominio de la función es $D(f)\Rightarrow R-\{-1,1\}$, por lo cual es discontinua en los puntos de abscisas $x=-1\ y\ x=1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{-x}{x^2-1}=\frac{-1}{1^--1}=\frac{-1}{0^-}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{-x}{x^2-1}=\frac{-1}{1^+-1}=\frac{-1}{0^+}=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\underline{Para\ x=-1\ \Rightarrow Discontinuidad\ inevitable\ de\ salto\ infinito.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{1^--1}=\frac{1}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{1^+-1}=\frac{1}{0^+}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\underline{Para\ x=1\ \Rightarrow Discontinuidad\ inevitable\ de\ salto\ infinito.}$$

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en su dominio, excepto para $x=0$, cuya continuidad es dudosa y se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=0 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-x}{x^2-1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x^2-1} = 0 = f(0) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow \underline{f(x)\ es\ continua\ en\ x=0}$.

La función $f(x)$ es derivable su dominio, excepto para $x=0$ cuya derivabilidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} & si\ x<0 \\ \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} & si\ x \geq 0 \end{cases} (*) \Rightarrow x=0 \Rightarrow f'(0) = \begin{cases} 1 & si\ x<0 \\ -1 & si\ x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow \underline{f(x)\ no\ es\ derivable\ para\ x=0}$.

$$(*) \begin{cases} g(x) = \frac{-x}{x^2-1} \Rightarrow g'(x) = \frac{-1\cdot(x^2-1)+x\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2+1+2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} \\ h(x) = \frac{x}{x^2-1} \Rightarrow h'(x) = \frac{1\cdot(x^2-1)-x\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} \end{cases}.$$

$b)$

El teorema de Rolle dice que “si una función $f(x)$ en continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), con $a,b \in R$ y $a<b$, y se cumple que $f(a)=f(b)$, existe al menos un valor c, $a<c<b$ tal que $f'(c)=0$”.

Según el apartado anterior, la función no es derivable para $x=0 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, por lo cual:

$$\underline{A\ f(x)\ no\ le\ es\ aplicable\ el\ teorema\ de\ Rolle\ en\ \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right]}.$$

$c)$

En el intervalo $\left[\frac{3}{2}, 4\right]$ la función es $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ y sus ordenadas son positivas, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_{\frac{3}{2}}^{4} \frac{x}{x^2-1} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x^2-1=t \\ 2x\cdot dx = dt \\ x\cdot dx = \frac{1}{2}\cdot dt \end{array} \middle| \begin{array}{c} x=4 \to t=15 \\ x=\frac{3}{2} \to t=\frac{5}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \int_{\frac{5}{4}}^{15} \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}\cdot dt =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int_{\frac{5}{4}}^{15} \frac{1}{t}\cdot dt = \frac{1}{2}\cdot[Lt]_{\frac{5}{4}}^{15} = \frac{1}{2}\cdot\left(L15 - L\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot(L15 - L5 + L4) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(L\frac{15}{5} + L4 \right) = \frac{1}{2} \cdot (L3 + L4) = \frac{1}{2} \cdot L12.$$

$$\underline{S = \frac{1}{2} \cdot L12 \; u^2 \cong 1{,}24 \; u^2}.$$

****

4º) Sea a un parámetro real cualquiera. Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & -a & 2a-1\end{pmatrix}$:

$a)$ Determina para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz A.

$b)$ Halla la inversa de la matriz A, cuando exista.

$c)$ Para $a=1$ y las matrices $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, resuelve el sistema $\left.\begin{matrix}BXA=Y\\ \frac{1}{3}Y+C=D\end{matrix}\right\}$.

$a)$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & -a & 2a-1\end{vmatrix}=a(2a-1)=0 \Rightarrow a_1=0, a_2=\frac{1}{2}.$$

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall a\in R-\left\{0,\frac{1}{2}\right\}}.$$

$b)$

Se obtiene la inversa de A dependiente del parámetro a por el procedimiento de Gauss-Jordan.

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -a & 2a-1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_3\to F_3+F_2\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2a-1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{matrix}F_2\to\frac{1}{a}F_2\\ F_3\to\frac{1}{2a-1}F_3\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2a-1} & \frac{1}{2a-1}\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \underline{A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{a} & 0\\ 0 & \frac{1}{2a-1} & \frac{1}{2a-1}\end{pmatrix}}.$$

$c)$

$$\frac{1}{3}Y+C=D;\ Y+3C=3D;\ Y=3D-3C=\begin{pmatrix}9 & 3 & 6\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 6 & 9\\ -3 & 6 & -9\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}6 & -3 & -3\\ 3 & -6 & 9\end{pmatrix}.$$

$$BXA=Y;\ \ B^{-1}\cdot B\cdot X\cdot A\cdot A^{-1}=B^{-1}\cdot Y\cdot A^{-1};\ \ I\cdot X\cdot I=B^{-1}\cdot Y\cdot A^{-1}\Rightarrow$$

$\Rightarrow X = B^{-1} \cdot Y \cdot A^{-1}$.

Las matriz inversa de B es la siguiente:

$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 1;\ \ B^t = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};\ \ Adj.de\ M^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow B^{-1} = \frac{Adj.de\ B^t}{|B|} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Para $a = 1 \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$X = B^{-1} \cdot Y \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 9 & 0 & -15 \\ -21 & -3 & 42 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -15 & -15 \\ -21 & 39 & 42 \end{pmatrix}$.

$$\underline{X = \begin{pmatrix} 9 & -15 & -15 \\ -21 & 39 & 42 \end{pmatrix};\ Y = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}.}$$

****

OPCIÓN B

1º) En un colegio se han ofertado para los niños de infantil tres actividades escolares, Ingles (ING), Multideporte (MUL) y Robótica (ROB), con dos rangos de edad de 3 a 4 años (MP) y de 5 a 6 años (MG). Se sabe que se han apuntado a alguna actividad un total de 300 niños. De ellos, hay 100 que tienen entre 3 y 4 años, de los cuales 82 hacen Inglés y 10 han elegido Multideporte. Se sabe que al grupo de Robótica se han apuntado 83 niños, y hay 105 niños de entre 5 y 6 años que se han apuntado a Inglés.

a) Toma un niño al azar, halla las siguientes probabilidades:

$$P(MG), P(MUL), P(MP \cap ROB), P(ROB/MP) \text{ y } P(MG/ING).$$

b) Comprueba que el suceso MUL es independiente de la edad del niño.

La tabla de contingencias que se deduce del enunciado es la siguiente:

	ING	MUL	ROB	
3-4 años MP	82	10		100
5-6 años MG	105			
			83	300

Completando la tabla de contingencias resulta:

	ING	MUL	ROB	
3-4 años MP	82	10	*8*	100
5-6 años MG	105	*20*	*75*	*200*
	187	*30*	83	300

a)

$$P(MG) = \frac{200}{300} = \underline{0,6667}. \qquad P(MUL) = \frac{30}{300} = \underline{0,1}.$$

$$P(MP \cap ROB) = \frac{8}{100} = \underline{0,08}.$$

$$P(ROB/MP) = \frac{P(MP \cap ROB)}{P(MP)} = \frac{\frac{8}{100}}{\frac{100}{300}} = \frac{0,08}{\frac{1}{3}} = \underline{0,24}.$$

$$P(MG/ING) = \frac{P(MG \cap ING)}{P(ING)} = \frac{\frac{105}{200}}{\frac{187}{300}} = \frac{105 \cdot 3}{187 \cdot 2} = \frac{315}{374} = \underline{0,8422}.$$

b)

Dos sucesos A y B son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$:

$$P(MUL) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}; \;\; P(MP) = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}; \;\; P(MG) = \frac{200}{300} = \frac{2}{3};$$

$$P(MP \cap MUL) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = P(MG \cap MUL) = \frac{20}{200} = \frac{1}{10}.$$

$$P(MP) \cdot P(MUL) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{30} \neq \frac{1}{10} = P(MP \cap MUL).$$

$$P(MG) \cdot P(MUL) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{2}{30} \neq \frac{1}{10} = P(MG \cap MUL).$$

$\underline{Queda\ comprobado\ que\ el\ suceso\ MUL\ es\ independiente\ de\ la\ edad\ del\ niño.}$

****

2º) Dos vértices consecutivos de un rectángulo son $P(2, 2, 1)$ y $Q(0, 0, -1)$ y los otros dos pertenecen a una recta r que pasa por el punto $A(5, 4, 3)$.

a) Determina la ecuación de la recta r.

b) Determina la ecuación del plano π que contiene al rectángulo.

----

a)

Los puntos $P(2, 2, 1)$ y $Q(0, 0, -1)$ determinan el siguiente vector:

$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = [(2, 2, 1) - (0, 0, -1)] = (2, 2, 2)$.

Un vector director de la recta r es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{v_r} = (1, 1, 1)$.

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 4 + \lambda. \\ z = 3 + \lambda \end{cases}}$$

b)

El plano π que contiene al rectángulo contiene a la recta r y a los puntos P y Q, por lo cual dos vectores directores suyos son $\overrightarrow{v_r}$ y:

$\overrightarrow{QA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OQ} = [(5, 4, 3) - (0, 0, -1)] = (5, 4, 4)$.

La expresión general de π es la siguiente: $\pi(Q;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{QA}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0;$

$4x + 5y + 4(z + 1) - 5(z + 1) - 4x - 4y = 0;\ \ y - (z + 1) = 0.$

$$\underline{\pi \equiv y - z - 1 = 0}$$

****

3º) Sea la función $f(x) = \frac{|x|}{x^2-1}$:

a) Analiza la continuidad y derivabilidad de la función f.

b) Razona si se puede aplicar, o no, el teorema de Rolle en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. En caso afirmativo, calcula el valor $c \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ a que se refiere el teorema de Rolle.

c) Halla el área encerrada por f y el eje de abscisas en el intervalo $\left[\frac{3}{2}, 4\right]$.

4º) Sea a un parámetro real cualquiera. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 2a-1 \end{pmatrix}$:

a) Determina para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz A.

b) Halla la inversa de la matriz A, cuando exista.

c) Para $a = 1$ y las matrices $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, resuelve el sistema $\left.\begin{array}{r} BXA = Y \\ \frac{1}{3}Y + C = D \end{array}\right\}$.

(Resueltos en la primera parte).

****