PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JUNIO – 2019

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas. Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

OPCIÓN A

1º) Dados la recta $r \equiv \begin{cases} 2x+2y+2z=2 \\ -x-2y-z=0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv ax+y+z-b=0$:

a) Determina a y b para que el plano π contenga a la recta r.

b) Determina a y b para que r sea paralela al plano π.

----

a)

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=1 \\ -x-2y-z=0 \end{cases} \Rightarrow y=-1;\ \ z=\lambda;\ \ x=1+1-\lambda=2-\lambda \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=-1 \\ z=\lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de r son $P(2,-1,0)$ y $\overrightarrow{v_r}=(-1,0,1)$.

La recta r estará contenida en el plano π cuando el vector director de la recta y el vector normal del plano sean perpendiculares y que, cualquier punto de la recta pertenezca al plano.

Un vector normal del plano π es $\vec{n}=(a,1,1)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (-1, 0, 1) \cdot (a, 1, 1) = 0;\ -a + 0 + 1 = 0 \Rightarrow a = 1.$

El punto P pertenece al plano π cuando satisface su ecuación:

$$\left. \begin{array}{r} \pi \equiv x + y + z - b = 0 \\ P(2, -1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow 2 - 1 + 0 - b = 0 \Rightarrow b = 1.$$

$\underline{La\ recta\ r\ está\ contenida\ en\ el\ plano\ \pi\ para\ a = 1\ y\ b = 1}.$

$b)$

La recta r es paralela al plano π cuando el vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares y, cualquier punto de la recta no pertenece al plano.

$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow a = 1.$

El punto P no pertenece al plano π cuando no satisface su ecuación:

$$\left. \begin{array}{r} \pi \equiv x + y + z - b = 0 \\ P(2, -1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow 2 - 1 + 0 - b \neq 0 \Rightarrow b \neq 1.$$

$\underline{La\ recta\ r\ es\ paralela\ al\ plano\ \pi\ para\ a = 1\ y\ b \neq 1}.$

****

2º) La distribución del número de rapes capturados por los barcos pesqueros que salen a faenar en una cierta zona se ajusta a una normal de media 220. Se sabe que, tomando un barco al azar la probabilidad de que capture más de 250 es 0,1587.

a) Calcula la desviación típica de la distribución.

b) Calcula el número de rapes que un barco debe capturar para estar en el percentil 95.

----

a)

$Datos$: $\mu = 220$; σ?

$X \rightarrow N(\mu;\ \sigma) = N(220, \sigma)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-220}{\sigma}$.

$P = P(X \geq 250) = 0{,}1587 \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{250-220}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{250-220}{\sigma}\right) =$

$1 - 0{,}1587 = 0{,}8413 \Rightarrow$ Mirando en la tabla $N(0, 1)$ se observa que $0{,}8413$ le corresponde el valor $1{,}00$, por lo cual:

$$\frac{250-220}{\sigma} = 1 \Rightarrow \sigma = 250 - 220 = 30.$$

$$\underline{La\ desviacón\ tipica\ de\ la\ distribución\ es\ \sigma = 30.}$$

b)

$P = P(X \leq N) = 0{,}95 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{N-220}{30}\right) = 0{,}95.$

Mirando en la tabla $N(0, 1)$ se observa que $0{,}95$ le corresponde el valor $1{,}645$, por lo cual:

$$\frac{N-220}{30} = 1{,}645 \Rightarrow N = 30 \cdot 1{,}645 + 220 = 49{,}35 + 220 = 269{,}35.$$

$$\underline{El\ barco\ debe\ capturar\ 270\ rapes.}$$

****

3º) Sea $f: R \to R$ la función definida como $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ -x^2 + ax + b, & x > 0 \end{cases}$, con a y b números reales.

$a)$ Halla a y b para que f sea continua y derivable en $x = 0$.

$b)$ Para los valores anteriores de a y b analiza si f tiene un extremo relativo en $x = 0$.

$c)$ Halla el área encerrada por la función y el eje OX en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 1\right]$.

$a)$

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 0$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de a y b para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1 = f(0) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (-x^2 + ax + b) = b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow b = 1.$$

La función resulta: $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ -x^2 + ax + 1, & x > 0 \end{cases}$.

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x = 0$ cuya derivabilidad se va a forzar determinando el correspondientes valor de a.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x) = \begin{cases} -sen\,x & si\ x \leq 0 \\ -2x + a & si\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f'(0) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ a & si\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow a = 0.$$

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ y\ derivable\ en\ x = 0\ para\ a = 0\ y\ b = 1.}$

$b)$

La función resulta $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ -x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$.

Una función tiene un extremo relativo cuando se anula su primera derivada.

$$f'(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x, & x \leq 0 \\ -2x, & x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

$$\underline{En\ efecto, la\ función\ f(x)\ tiene\ un\ extremo\ relativo\ para\ x = 0.}$$

$c)$

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x) \cdot dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x \cdot dx + \int_{0}^{1} (-x^2 + 1) \cdot dx.$$

Se tiene en cuenta que en $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ la función $f(x) = \cos x > 0$, así como en el intervalo $(0,1)$ la función $f(x) = -x^2 + 1$ también es $f(x) > 0$.

$$S = [sen\ x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \left[-\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 = \left[sen\ 0 - sen\ \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] + \left[\left(-\frac{1^3}{3} + 1\right) - 0\right] =$$

$$= -(-1) - \frac{1}{3} + 1 = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}.$$

$$\underline{S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x) \cdot dx = \frac{5}{3}\ u^2.}$$

****

4º) Sea a un parámetro real cualquiera. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determina para qué valores del parámetro real a existe la inversa de la matriz A.

Sea el sistema de ecuaciones $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Discute el sistema de ecuaciones para los distintos valores del parámetro a.

c) Resuelve el sistema de ecuaciones cuando sea compatible.

----

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a + a + a - a^3 - 1 - 1 = -a^3 + 3a - 2 = 0;$$

$a^3 - 3a + 2 = 0$. Resolviendo por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \\ 1 & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} & \\ -2 & & -2 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

Las raíces diferentes son $x_1 = 1, x_2 = -2$.

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall x \in R - \{1, -2\}}.$$

b)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a \neq 1 \\ a \neq -2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A' = 1.$$

$$\underline{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 1 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$$(con\ dos\ grados\ de\ libertad;\ o\ sea, dos\ parámetros).$$

$$Para\ a = -2 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 1 - 2 - 4 - 1 - 1 = -9 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A' = 3.$$

$$\underline{Para\ m = -2 \Rightarrow Rang\ A = 2;\ Rang\ A' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$b)$

Resolvemos para $a \neq 1\ y\ a \neq -2$ por la regla de Cramer.

El sistema resulta: $\left.\begin{array}{r} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = 1 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{a+a+1-a^2-1-1}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{-a^2+2a-1}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{(a-1)^2}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{(a+2)}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{1+a+a-a^2-1-1}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{-a^2+2a-1}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{(a+2)}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{a+1+a-a^2-1-1}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{-a^2+2a-1}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{(a+2)}.$$

$$\underline{Solución: x = y = z = \frac{1}{(a+2)}, \forall a \in R - \{1, -2\}.}$$

Para $a = 1$ el sistema resulta: $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{array}\right\}$, que es equivalente a la ecuación $x + y + z = 1$, que es compatible indeterminado con dos grados de libertad; haciendo $x = \lambda\ e\ y = \mu$:

$$\underline{Solución: x = \lambda;\ y = \mu;\ z = 1 - \lambda - \mu, \forall \lambda, \mu \in R.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Sean el plano $\pi \equiv 2x + y - z - 3 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases}$.

a) Determina la ecuación de la recta s que contiene al punto $P(1, 2, -1)$, es perpendicular a la recta r y paralela al plano π.

b) Halla la distancia de la recta r al plano π.

----

a)

Un vector director de la recta pedida s es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial del vector director de la recta r y del vector normal del plano π.

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (2, 1, -1)$.

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r} = (1, -1, 3)$.

$$\vec{n} \wedge \overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3i - j - 2k - k - i - 6j = 2i - 7j - 3k.$$

Un vector director de la recta s es $\overrightarrow{v_s} = (2, -7, -3)$.

La recta pedida es $\underline{s \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - 7\lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}}$.

b)

La distancia de la recta r al plano π, por ser paralelos, es equivalente a la distancia de un punto de la recta al plano.

Un punto de la recta r es $Q(3, 2, 1)$.

La distancia de un punto $Q_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(Q_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Aplicando la fórmula al punto Q y al plano $\pi \equiv 2x + y - z - 3 = 0$:

$$d(r, \pi) = d(Q, \pi) = \frac{|2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|6 + 2 - 1 - 3|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{6} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

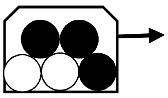
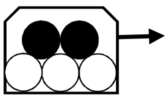
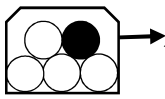
$$\underline{d(r, \pi) = \frac{2\sqrt{6}}{3}\ unidades.}$$

****

2º) Se tienen tres urnas: A, B y C. La urna A contiene dos bolas blancas y tres negras, la B tres bolas blancas y dos negras, la C cuatro bolas blancas y una negra. Se lanza un dado y se tomas dos bolas de una urna: de la urna A si sale 1, 2 o 3, de la urna B si sale 4 o 5 y de la urna C si sale un 6.

a) Calcula la probabilidad de obtener dos bolas blancas.

b) Suponiendo que las dos bolas extraídas son blancas, calcula la probabilidad de que se hayan extraído de la primera urna.

 $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$  $P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$  $P(C)=\frac{1}{6}.$

a)

$$P=P(A\cap BlBl)+P(B\cap BlBl)+P(C\cap BlBl)=$$

$$=P(A)\cdot P(BlBl/A)+P(B)\cdot P(BlBl/B)+P(C)\cdot P(BlBl/C)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{20}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{1+2+2}{20}=\frac{5}{20}=\underline{\frac{1}{4}=0{,}25}.$$

b)

$$P=P(A/BlBl)=\frac{P(A\cap BlBl)}{P(A\cap BlBl)+P(B\cap BlBl)+P(C\cap BlBl)}=$$

$$=\frac{P(A)\cdot P(BlBl/A)}{P(A)\cdot P(BlBl/A)+P(B)\cdot P(BlBl/B)+P(C)\cdot P(BlBl/C)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{20}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{1+2+2}{20}}=$$

$$=\underline{\frac{1}{5}=0{,}2}.$$

****

(RESUELTOS EN LA OPCIÓN A)

3º) Sea $f: R \rightarrow R$ la función definida como $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ -x^2 + ax + b, & x > 0 \end{cases}$, con a y b números reales.

a) Halla a y b para que f sea continua y derivable en $x = 0$.

b) Para los valores anteriores de a y b analiza si f tiene un extremo relativo en $x = 0$.

c) Halla el área encerrada por la función y el eje OX en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 1\right]$.

4º) Sea a un parámetro real cualquiera. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determina para qué valores del parámetro real a existe la inversa de la matriz A.

Sea el sistema de ecuaciones $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Discute el sistema de ecuaciones para los distintos valores del parámetro a.

c) Resuelve el sistema de ecuaciones cuando sea compatible.

****