PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JULIO – 2020

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a solo cinco ejercicios de entre los propuestos. En caso contrario, se corregirán los cinco que haya contestado primero. Es necesario justificar las respuestas. Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionan otra.

1º) $a)$ Calcula el siguiente límite: $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - sen\,x \cdot cos\,x}{1 + sen\,x \cdot cos\,x} \right)^{\frac{1}{sen\,x}}$.

$b)$ Determinar el valor de la constante real a para que se satisfaga la siguiente desigualdad: $\lim_{x \to 4} \frac{tg\left[\left(\frac{\pi}{8}+1\right)\cdot\sqrt{x}-2\right]}{x^2-16+ax} = \frac{1}{32}$.

$a)$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - sen\,x \cdot cos\,x}{1 + sen\,x \cdot cos\,x} \right)^{\frac{1}{sen\,x}} = \left(\frac{1 - sen\,0 \cdot cos\,0}{1 + sen\,0 \cdot cos\,0} \right)^{\frac{1}{sen\,0}} = \left(\frac{1-0}{1+0} \right)^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - sen\,x \cdot cos\,x}{1 + sen\,x \cdot cos\,x} \right)^{\frac{1}{sen\,x}}; \;\; LA = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{sen\,x} \cdot L\,\frac{1 - sen\,x \cdot cos\,x}{1 + sen\,x \cdot cos\,x} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{L\left(1-\frac{1}{2}\cdot sen\,2x\right) - L\left(1+\frac{1}{2}\cdot sen\,2x\right)}{sen\,x} = \frac{L\left(1-\frac{1}{2}\cdot sen\,0\right) - L\left(1+\frac{1}{2}\cdot sen\,0\right)}{sen\,x} = \frac{L1 - L1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-\cos 2x}{1-\frac{1}{2}\cdot sen\,2x} - \frac{\cos 2x}{1+\frac{1}{2}\cdot sen\,2x}}{cos\,x} = \lim_{x \to 0} \cos 2x \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-1}{1-\frac{1}{2}\cdot sen\,2x} - \frac{1}{1+\frac{1}{2}\cdot sen\,2x}}{cos\,x} =$$

$$= 1 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-1-\frac{1}{2}\cdot sen\,2x - 1 + \frac{1}{2}\cdot sen\,2x}{\left(1-\frac{1}{2}\cdot sen\,2x\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot sen\,2x\right)}}{cos\,x} = \lim_{x \to 0} \frac{-2}{cos\,x \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\cdot sen^2 2x\right)} = \frac{-2}{cos\,0 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\cdot sen^2 0\right)} = \frac{-2}{1 \cdot 1} = -2.$$

$$\underline{\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - sen\,x \cdot cos\,x}{1 + sen\,x \cdot cos\,x} \right)^{\frac{1}{sen\,x}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}.}$$

$b)$

$$\lim_{x\to4}\frac{tg\left[\left(\frac{\pi}{8}+1\right)\cdot\sqrt{x}-2\right]}{x^2-16+ax}=\frac{1}{32};\quad \frac{tg\left(\frac{\pi+8}{8}\cdot\sqrt{4}-2\right)}{4^2-16+a\cdot4}=\frac{1}{32};\quad \frac{tg\left(\frac{\pi+8}{4}-2\right)}{4a}=\frac{1}{32};\quad \frac{tg\,\frac{\pi+8-8}{4}}{4a}=\frac{1}{32};$$

$$\frac{tg\,\frac{\pi}{4}}{a}=\frac{1}{8};\quad \frac{1}{a}=\frac{1}{8}\ \Rightarrow\ \underline{a=8}.$$

****

2º) Determinar los valores de los parámetros reales a y b para que las funciones $f(x) = ax^2 + b$ y $g(x) = x^2 + x + a$, sean tangentes en el punto de abscisa $x = -1$. Para los valores obtenidos de a y b, calcular la recta tangente a las curvas en $x = -1$.

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto: $f'(-1) = g'(-1)$.

$f'(x) = 2ax \ \Rightarrow\ f'(-1) = -2a.$

$g'(x) = 2x + 1 \ \Rightarrow\ g'(-1) = -2 + 1 = -1.$

$f'(-1) = g'(-1) \Rightarrow -2a = -1 \Rightarrow \underline{a = \frac{1}{2}}.$

Las funciones resultan $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + b$ y $g(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}$.

En el punto de corte tiene que cumplirse que $f(-1) = g(-1)$:

$f(-1) = \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + b = \frac{1}{2} + b.$

$g(-1) = (-1)^2 - 1 + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

$f(-1) = g(-1) \Rightarrow \frac{1}{2} + b = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ \underline{b = 0}.$

El punto de tangencia es $P\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ y la pendiente $m = g'(-1) = -1$.

La ecuación de la recta punto-pendiente es $y - y_0 = m(x - x_0)$:

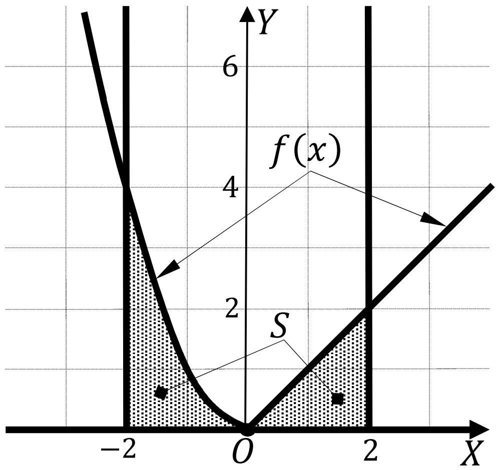
$y - \frac{1}{2} = -1 \cdot (x + 1) = -x - 1;\ \ 2y - 1 = -2x - 2.$

$$\underline{Recta\ tangente: t \equiv 2x + 2y + 1 = 0.}$$

****

3º) Calcular el área del recinto limitado por la función $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$, las rectas $x = -2, x = 2$ y el eje OX.

La representación gráfica de la función, aproximada, se expresa en la figurea adjunta.



La superficie a calcular es la siguiente:

$S = \int_{-2}^{0} x^2 \cdot dx + \int_{0}^{2} x \cdot dx =$

$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2} = 0 - \left[\frac{(-2)^3}{3}\right] + \frac{2^2}{2} - 0 =$

$= \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}.$

$$\underline{S = \frac{14}{3}\ u^2 \cong 4{,}67\ u^2.}$$

****

4º) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}, m \in R \setminus \{0\}$.

a) Hallar α y β de tal forma que $A^2 = \alpha A + \beta I$, siendo I la matriz identidad.

b) Calcula A^5 utilizando la igualdad anterior.

----

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4m & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = \alpha A + \beta I \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4m & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 0 \\ ma & 0 & 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4m & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+\beta & 0 & 0 \\ 0 & 2a+\beta & 0 \\ ma & 0 & 2a+\beta \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{a = 4}. \quad 4 = 8 + \beta; \ \ \underline{\beta = -4}.$$

b)

$$A^5 = A^2 \cdot A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4m & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4m & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 32m & 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{A^5 = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 80m & 0 & 32 \end{pmatrix}}.$$

****

5º) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} ay+(a+1)z=a \\ ax+z=a \\ x+az=-a \end{array}\right\}$:

a) Discutir y resolver según el valor del parámetro real a.

b) Determinar la inversa de la matriz asociada al sistema para $a=2$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 0 & a & a+1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 0 & a & a+1 & a \\ a & 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a & -a \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 0 & a & a+1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix}=a-a^3=0;\ \ a(1-a^2)=0 \Rightarrow \begin{cases} a_1=0 \\ a_2=-1. \\ a_3=1 \end{cases}$$

$$\underline{Para\ \left\{\begin{array}{c} a\neq 0 \\ a\neq -1 \\ a\neq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{o}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$Para\ a=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2=-F_3\} \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ \left\{\begin{array}{c} a=0 \\ a=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<n^{o}\ incóg. \Rightarrow S.C.I}$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=1+1=2\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ a=1 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

Se resuelve el sistema para los diferentes casos compatibles.

$Para\ a \neq 0, a \neq -1, a \neq 1$ se resuelve por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & a+1 & a \\ a & 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a & -a \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & -a \\ a & 0 & 1 & a \\ 0 & a & a+1 & a \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_2 \to F_2 - aF_1\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & -a \\ 0 & 0 & 1-a^2 & a+a^2 \\ 0 & a & a+1 & a \end{pmatrix} \Rightarrow (1-a^2)z = a + a^2;$$

$$z = \frac{a+a^2}{1-a^2} = \frac{a(1+a)}{(1+a)(1-a)} = \frac{a}{1-a}.$$

$$ay + (a+1)z = a; \ \ ay = a - (1+a) \cdot \frac{a}{1-a} = \frac{a-a^2-a-a^2}{1-a} = \frac{-2a^2}{1-a} \Rightarrow y = \frac{-2a}{1-a}.$$

$$x + az = -a; \ \ x = -a - az = -a - \frac{a^2}{1-a} = \frac{-a+a^2-a^2}{1-a} = \frac{-a}{1-a}.$$

$\underline{Solución: x = \frac{-a}{1-a}, y = \frac{-2a}{1-a}, z = \frac{a}{1-a}, \forall a \in R - \{-1, 0, 1\}.}$

$$Para\ a = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\underline{Solución: x = 0, y = \lambda, z = 0, \forall \lambda \in R.}$

$$Para\ a = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow -y = -1; \ \ y = 1.$$

$$x - z = 1 \Rightarrow z = \lambda; \ \ x = 1 + \lambda.$$

$\underline{Solución: x = 1 + \lambda, y = 1, z = \lambda, \forall \lambda \in R.}$

$b)$

Para $a = 2 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. $\quad |M| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 8 = -6.$

$$M^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \qquad Adj.\,de\ M^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -3 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$M^{-1} = \frac{Adj.\ de\ M^t}{|M|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -3 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}}{-6} \Rightarrow \underline{M^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 3 & 3 & -6 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}}.$$

****

6º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -13 & 5 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$:

$a)$ Hallar X e Y, matrices soluciones del sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} 3X - 5Y = A \\ -X + 2Y = B \end{array}\right\}$.

$b)$ Calcular, si existen, las matrices inversas de X e Y.

$a)$

$$\left.\begin{array}{r} 3X - 5Y = A \\ -X + 2Y = B \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 6X - 10Y = 2A \\ -5X + 10Y = 5B \end{array}\right\} \Rightarrow X = 2A + 5B.$$

$$X = 2 \cdot \begin{pmatrix} -13 & 5 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 & 10 \\ 20 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 & -10 \\ -20 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

$$\left.\begin{array}{r} 3X - 5Y = A \\ -X + 2Y = B \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 3X - 5Y = A \\ -3X + 6Y = 3B \end{array}\right\} \Rightarrow Y = A + 3B.$$

$$Y = \begin{pmatrix} -13 & 5 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 5 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 & -6 \\ -12 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.}$$

$b)$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|X| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \underline{X\ no\ es\ invertible.}$$

$$|Y| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0 \Rightarrow \underline{Y\ no\ es\ invertible.}$$

****

7º) Determinar, en función del parámetro real a, la posición relativa de los siguientes planos: $\begin{cases} \pi_1 \equiv (a-1)x + y - z = a \\ \pi_2 \equiv (a+1)x + (2a+1)y + z = -a. \\ \pi_3 \equiv ax + ay + z = -a \end{cases}$

Las matrices de coeficientes y ampliada del sistema que determinan los tres planos son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ a+1 & 2a+1 & 1 \\ a & a & 1 \end{pmatrix} \; y \; M' = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 & a \\ a+1 & 2a+1 & 1 & -a \\ a & a & 1 & -a \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de estas matrices, la posición relativa de los planos son las siguientes:

1º. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ un\ punto.$

2º. -- $Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Los\ planos\ son\ secantes\ dos\ a\ dos.$

3º. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ una\ recta.$

4º. -- $Rang\ M = 1;\ Rang\ M' = 2 \Rightarrow Los\ planos\ son\ paralelos.$

5º. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 1 \Rightarrow Los\ planos\ son\ coincidentes.$

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ a+1 & 2a+1 & 1 \\ a & a & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a-1)(2a+1) - a(a+1) + a + a(2a+1) - a(a-1) - (a+1) =$$

$$= 2a^2 + a - 2a - 1 - a^2 - a + a + 2a^2 + a - a^2 + a - a - 1 = 2a^2 - 2 = 0;$$

$$2(a^2-1) = 0;\ \ a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a_1 = -1, a_2 = 1.$$

$$\underline{Si\ \begin{Bmatrix} a \neq -1 \\ a \neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ un\ punto.}$$

$$Para\ a = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_3 = C_4\} \Rightarrow Rang\ M' = 2$$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_3 = -C_4\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Si\ \begin{Bmatrix} a=-1 \\ a=1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ una\ recta.}$$

Por diferenciar los casos, las rectas que determinan son las siguientes:

$$a=-1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x-y=-1 \\ x+y-z=-1 \end{cases}}.$$

$$a=1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{s \equiv \begin{cases} y-z=1 \\ x+y+z=-1 \end{cases}}.$$

****

8º) Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)\ y\ \vec{v} = (0, 1, 1)$.

$a)$ Hallar un vector $\vec{w}$ de módulo uno, que sea perpendicular a $\vec{u}\ y\ \vec{v}$.

$b)$ Calcular el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}\ y\ \vec{v}$.

$a)$

Un vector perpendicular a los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ es cualquiera que sea linealmente dependiente de su producto vectorial:

$$\overrightarrow{w'} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2i + k - 3i - j = -i - j + k = (-1, -1, 1).$$

Para obtener un vector unitario linealmente dependiente de $\overrightarrow{w'}$ basta con dividir sus componentes por su módulo:

$$\left|\overrightarrow{w'}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}.$$

$$\underline{\overrightarrow{w_1} = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ y\ \overrightarrow{w_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right).}$$

$b)$

El área del paralelogramo determinado por dos vectores es el módulo de su producto vectorial:

$$\underline{Area = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{3}\ u^2.}$$

****

9º) En una clase de primero de primaria el 50 % de los niños practica natación, el 20 % practica baloncesto y el 5 % ambos deportes.

a) Calcular la probabilidad de que un niño elegido al azar no practique natación ni baloncesto.

b) Calcular la probabilidad de que un niño practique natación si juega al baloncesto.

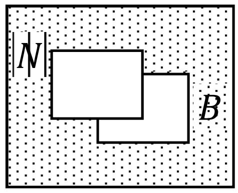
$$Datos: P(N) = 0{,}50; \;\; P(B) = 0{,}20; \;\; P(N \cap B) = 0{,}05.$$

a)

$$P = P\left(\overline{N} \cap \overline{B}\right) = 1 - P(N \cup B) =$$

$$= 1 - [P(N) + P(B) - P(N \cap B)] = 1 - (0{,}5 + 0{,}2 - 0{,}05) =$$

$$= 1 - (0{,}70 - 0{,}5) = 1 - 0{,}65 = \underline{0{,}35}.$$



$\overline{N} \cap \overline{B} = 1 - (N \cup B)$

b)

$$P(N|B) = \frac{P(N \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}05}{0{,}20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = \underline{0{,}25}.$$

****

10º) Se sabe que dos poblaciones distintas, X e Y, se distribuyen según una Normal de media 25. Además $P(X \geq 27) = P(X \geq 30) = 0{,}1587$. Calcular sus respectivas varianzas.

$Datos: \ \mu = 25; \ \ \sigma.$

$X \to N(\mu; \ \sigma) = N(25, \sigma).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-25}{\sigma}$.

Para $P(X \geq 27) = 0{,}1587$.

$P = P(X \geq 27) = 0{,}1587 \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{27-25}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{2}{\sigma}\right) = 0{,}1587;$

$1 - P\left(Z < \frac{2}{\sigma}\right) = 0{,}1587; \ \ P\left(Z < \frac{2}{\sigma}\right) = 1 - 0{,}1587; \ \ P\left(Z < \frac{2}{\sigma}\right) = 0{,}8413.$

Buscando en la tabla $N(0, 1)$ de forma inversa, a 0,8413 le corresponde 1, por lo cual:

$\frac{2}{\sigma} = 1 \Rightarrow \sigma = 2 \Rightarrow \underline{\sigma^2 = 4}.$

Para $P(X \geq 30) = 0{,}1587$.

$P = P(X \geq 30) = 0{,}1587 \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{30-25}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{5}{\sigma}\right) = 0{,}1587;$

$1 - P\left(Z < \frac{5}{\sigma}\right) = 0{,}1587; \ \ P\left(Z < \frac{5}{\sigma}\right) = 1 - 0{,}1587; \ \ P\left(Z < \frac{5}{\sigma}\right) = 0{,}8413.$

$\frac{5}{\sigma} = 1 \Rightarrow \sigma = 5 \Rightarrow \underline{\sigma^2 = 25}.$

****