PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

EXTRAORDINARIA – 2021

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a SÓLO CINTO ejercicios de entre los planteados. En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero. Es necesario justificar las respuestas. Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

1º) Sea la función $f(x) = \frac{x^2}{2-e^{-x}}$. Determinar el dominio, extremos relativos y las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas cuando existan.

El dominio de una función racional es el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$2 - e^{-x} = 0;\ \ 2 = e^{-x} = \frac{1}{e^x};\ \ e^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = L\frac{1}{2} = L1 - L2 = -L2.$$

$$\underline{D(f) \Rightarrow R - \{-L2\}}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$$f(x) = \frac{x^2}{2-e^{-x}} = \frac{x^2}{2-\frac{1}{e^x}} = \frac{x^2}{\frac{2e^x-1}{e^x}} = \frac{x^2 \cdot e^x}{2e^x-1}.$$

$$f'(x) = \frac{(2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x)(2e^x-1) - (x^2 \cdot e^x) \cdot 2e^x}{(2e^x-1)^2} = \frac{e^x \cdot [(x^2+2x)(2e^x-1) - 2x^2 \cdot e^x]}{(2e^x-1)^2} =$$

$$= \frac{e^x \cdot (2x^2 \cdot e^x - x^2 + 4x \cdot e^x - 2x - 2x^2 \cdot e^x)}{(2e^x-1)^2} = \frac{e^x \cdot (-x^2 + 4x \cdot e^x - 2x)}{(2e^x-1)^2} = \frac{-x \cdot e^x \cdot (x - 4 \cdot e^x + 2)}{(2e^x-1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x \cdot e^x \cdot (x - 4 \cdot e^x + 2)}{(2e^x-1)^2} = 0;\ \ -x \cdot e^x \cdot (x - 4 \cdot e^x + 2) = 0;\ \ x_1 = 0;$$

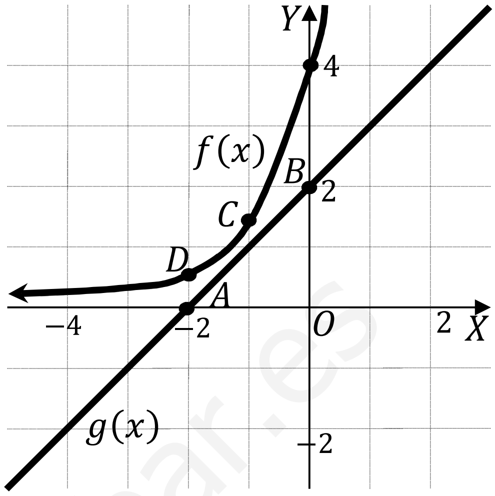
$x - 4 \cdot e^x + 2 = 0;\ \ x + 2 = 4 \cdot e^x$. Las soluciones de esta ecuación son los puntos de corte de las funciones $g(x) = x + 2$ y $h(x) = 4 \cdot e^x$. Se hace un esquema, aproximado, de las gráficas de las funciones.

La función $g(x) = x + 2$ es una recta que pasa por los puntos $A(-2, 0)\ y\ B(0, 2)$.

La función $h(x) = 4 \cdot e^x$ es una función exponencial, creciente, que corta el eje de ordenadas en el punto $C(0, 4)$; tiene como asíntota horizontal al eje de abscisas en su parte negativa y contiene los puntos siguientes:

$h(-1) = 4 \cdot e^{-1} = \frac{4}{e} \cong 1{,}47 \Rightarrow C(-1;\ 1{,}47)$.

$h(-2) = 4 \cdot e^{-2} = \frac{4}{e^2} \cong 0{,}54 \Rightarrow D(-2;\ 0{,}54)$.



Como se puede observar en la figura adjunta, las funciones $g(x) = x + 2$ y $h(x) = 4 \cdot e^x$ no tienen puntos en común, lo que supone que $(x - 4 \cdot e^x + 2) < 0$, para cualquier valor real de x, y como consecuencia, la única raíz real de la derivada es $x = 0$.

Para: $\left. \begin{array}{l} x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \\ x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x)\ tiene\ un\ mínimo\ relativa\ para\ x = 0.$

$f(0) = \frac{x^2}{2 - e^{-x}} = 0 \Rightarrow \underline{Mínimo\ relativo: O(0, 0)}$.

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{2 - e^{-x}} = \frac{(-\infty)^2}{2 - e^{-(-\infty)}} = \frac{\infty}{2 - e^{\infty}} = \frac{\infty}{2 - \infty} = -\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{-e^{-x}} = 0.$$

$$k = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2 - e^{-x}} = \frac{\infty^2}{2 - e^{-\infty}} = \frac{\infty}{2 - 0} = \frac{\infty}{2} = \infty.$$

$\underline{La\ recta\ y = 0\ (eje\ X)\ es\ asíntota\ horizontal\ en\ su\ parte\ negativa.}$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$\underline{La\ recta\ x = -L2\ es\ asíntota\ vertical}.$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las horizontales.

****

2º) Sea la función $f(x) = \cos x$. Halla el área de la superficie encerrada por la recta tangente a la gráfica de f en el punto $x = -\frac{\pi}{4}$, la gráfica de f y las rectas $x = -\frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

Para $x = -\frac{\pi}{4}$ es $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ Punto de tangencia: $P\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

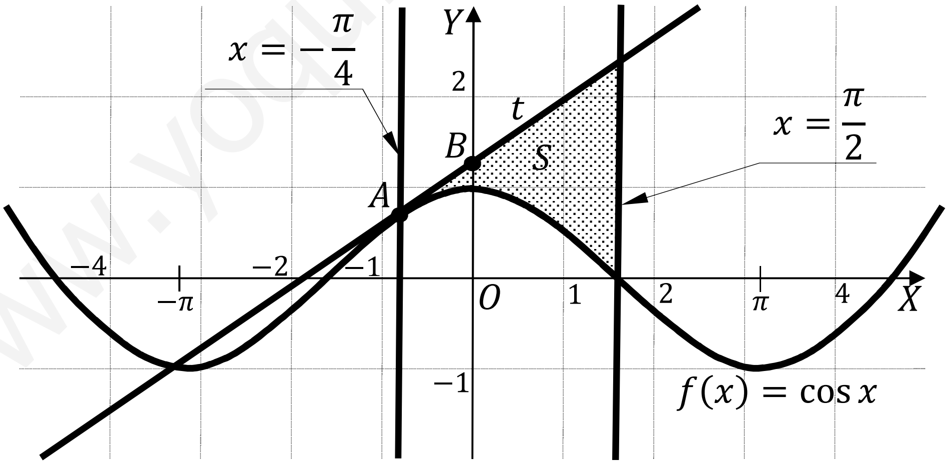
$$f'(x) = -sen\, x \Rightarrow m = f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -sen\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow m = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(0,1)$ con $m = -4$ es:

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\pi\sqrt{2}}{8};\ \ 8y - 4\sqrt{2} = 4\sqrt{2}x + \pi\sqrt{2};$$

$$8y = 4\sqrt{2}x + \pi\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\ \Rightarrow t \equiv y = \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot (4x + \pi + 4).$$

Para la representación de la recta tenemos en cuenta el punto de tangencia y haciendo $x = 0 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot (\pi + 4) \cong 1{,}26 \Rightarrow Q(0; 1{,}26)$.



La representación gráfica de la situación, aproximada, se expresa en la figura adjunta.

En la figura se observa que en el intervalo de la superficie a calcular, $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, las ordenadas de la recta tangente son mayores que las correspondientes ordenadas de la función $f(x) = \cos x$, por lo cual la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} t(x) \cdot dx - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot (4x + \pi + 4) \cdot dx - [sen\, x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \left[\frac{4x^2}{2} + \pi \cdot x + 4x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \left[sen\ \frac{\pi}{2} - sen\ \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot [x \cdot (2x + \pi + 4)]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - sen\ \frac{\pi}{2} + sen\ \left(-\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \left[\frac{\pi}{2} \cdot \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} + \pi + 4\right)\right] - \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \left[-\frac{\pi}{4} \cdot \left(2 \cdot \frac{-\pi}{4} + \pi + 4\right)\right] - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{16} \cdot (2\pi + 4) + \frac{\pi\sqrt{2}}{32} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 4\right) - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \cdot (\pi + 2) + \frac{\pi\sqrt{2}}{32} \cdot \frac{8+\pi}{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{32} \cdot \left(4\pi + 8 + \frac{8+\pi}{2}\right) - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{32} \cdot \frac{8\pi+16+8+\pi}{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{64} \cdot (9\pi + 24) - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 3{,}629 - 1{,}707 \ \Rightarrow \underline{S = 1{,}922\ u^2}$$

****

3º) Calcular los siguientes límites: $a)\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tag\,x}$. $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x}\right)^{x}$.

$a)$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tag\,x}=\left(\frac{1}{0}\right)^{0}=\infty^0\Rightarrow Indet.\Rightarrow A=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tag\,x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow LA=L\left[\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tag\,x}\right]\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\left[\mathrm{L}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tag\,x}\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[(L1-Lx^2)^{tag\,x}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[(-2\cdot Lx)^{tag\,x}\right]=\lim_{x\to 0^+}(-2\cdot tag\,x\cdot Lx)=\lim_{x\to 0^+}\left(-2\cdot\frac{sen\,x}{\cos x}\cdot Lx\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{-2}{\cos x}\cdot(sen\,x\cdot Lx)\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{-2}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0^+}(sen\,x\cdot Lx)=$$

$$=\frac{-2}{1}\cdot\lim_{x\to 0^+}(sen\,x\cdot Lx)=-2\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{Lx}{\frac{1}{sen\,x}}=-2\cdot\frac{-\infty}{\frac{1}{0}}=-2\cdot\frac{-\infty}{\infty}\Rightarrow Indet.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow -2\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{sen^2x}}=2\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{cox\,x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{sen^2x}{x}=2\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{sen^2 0}{0}=$$

$$=2\cdot\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow 2\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{2\cdot sen\,x\cdot\cos x}{1}=2\cdot\lim_{x\to 0^+}(sen\,2x)=$$

$$=2\cdot sen\,0=2\cdot 0=0\Rightarrow LA=0\Rightarrow A=\underline{\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tag\,x}=1.}$$

$b)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{4x}\right)^{x}=\left(1+\frac{-1}{\infty}\right)^{\infty}=1^\infty\Rightarrow Indet.\,n^{\text{o}}\ e\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-4x}\right)^{x}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-4x}\right)^{x\cdot(-4x)\cdot\frac{1}{-4x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-4x}\right)^{-4x}\right]^{\frac{x}{-4x}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-4x}\right)^{-4x}\right]^{-\frac{1}{4}}=e^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{e}}.$$

$$\underline{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x}\right)^{x}=\frac{\sqrt[4]{e^3}}{e}.}$$

****

4º) Discutir y resolver el sistema de ecuaciones lineales: $\left.\begin{array}{r} ax+y+z=2 \\ 2x+ay+a^2z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{array}\right\}$, según el valor del parámetro real a.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & a & a^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\ y\ M'=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a & a^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & a & a^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=a^2+2+2a^2-2a-a^3-2=-a^3+3a^2-2a=0;$$

$$=-a(a^2-3a+2)=0 \Rightarrow a_1=0;\ \ a^2-3a+2=0;\ \ a=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=$$

$$=\frac{3\pm 1}{2} \Rightarrow a_2=1, a_3=2.$$

$$\underline{Para \left\{\begin{array}{l} a\neq 0 \\ a\neq 1 \\ a\neq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M'=\{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=4+2-4=2\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2+4+2-4-1-4=-1\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para \left\{\begin{array}{l} a=0 \\ a=1 \end{array}\right\} \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a=2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_3\} \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$\underline{Para\ a = 2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$

Se resuelve en primer lugar para $a \neq 0, a \neq 1\ y\ a \neq 2$:

Resolviendo por la regla de Ruffini:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-a(a-1)(a-2)} = \frac{2a+1+2a^2-2a-2a^2-1}{-a(a-1)(a-2)} = \frac{0}{-a(a-1)(a-2)} = 0.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & 1 & a^2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-a(a-1)(a-2)} = \frac{a+4+4a^2-2-2a^3-4}{-a(a-1)(a-2)} = \frac{-2a^3+4a^2+a-2}{-a(a-1)(a-2)} = \frac{-(a-2)(2a^2-1)}{-a(a-1)(a-2)} =$$

$$\frac{2a^2-1}{a(a-1)}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-a(a-1)(a-2)} = \frac{2a^2+4+2-4a-a-4}{-a(a-1)(a-2)} = \frac{2a^2-5a+2}{-a(a-1)(a-2)} = \frac{(a-2)(2a-1)}{-a(a-1)(a-2)} = \frac{-2a+1}{a(a-1)}.$$

$\underline{Solución: x = 0;\ \ y = \frac{2a^2-1}{a(a-1)};\ \ z = \frac{-2a+1}{a(a-1)}, \forall a \in R - \{0, 1, 2\}.}$

Resolvemos ahora para $a = 2$; el sistema resulta $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$, que es compatible indeterminado y equivalente a $\left.\begin{matrix} 2x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 1 \end{matrix}\right\}$. Haciendo $z = \lambda$:

$$\left.\begin{matrix} 2x + y = 2 - \lambda \\ 2x + 2y = 1 - 4\lambda \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -2x - y = -2 + \lambda \\ 2x + 2y = 1 - 4\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = -1 - 3\lambda.$$

$$2x - 1 - 3\lambda = 2 - \lambda;\ \ 2x = 3 + 2\lambda \Rightarrow x = \frac{3}{2} + \lambda.$$

$\underline{Solución: x = \frac{3}{2} + \lambda;\ \ y = -1 - 3\lambda;\ \ z = \lambda,\ \forall \lambda \in R.}$

****

5º) Hallar las matrices $A-B, A\ y\ B$, sabiendo que las matrices $A\ y\ B$, satisfaces las siguientes identidades:

$$A+B=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix},\ A^2-AB+BA-B^2=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -2\\ -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

$$A^2-AB+BA-B^2=A\cdot(A-B)+B\cdot(A-B)=(A+B)(A-B).$$

Multiplicando por la izquierda los dos términos por $(A+B)^{-1}$:

$$(A+B)^{-1}\cdot(A^2-AB+BA-B^2)=(A+B)^{-1}\cdot(A+B)\cdot(A-B);$$

$$(A+B)^{-1}\cdot(A^2-AB+BA-B^2)=I\cdot(A-B)\Rightarrow$$

$$(A^2-AB+BA-B^2)\cdot(A-B)^{-1}=(A+B)\cdot I\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{A-B=(A+B)^{-1}\cdot(A^2-AB+BA-B^2)}.$$

Se obtiene la inversa de $(A+B)$ por el método de Gauss-Jordan.

$$(A+B|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\begin{Bmatrix}F_1\leftrightarrow F_3\\ F_2-F_2\end{Bmatrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{F_3\to -F_3\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow\{F_1\to F_1-F_3\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow(A+B)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

$$A-B=(A+B)^{-1}(A^2-AB+BA-B^2)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 0 & -2\\ -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{A-B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}}.$$

$$A+B+(A-B)=2A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{A=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 0 & -3\\ 2 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix}}.$$

$$A+B=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow B=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}-A=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 0 & -3\\ 2 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 0 & -\frac{3}{2}\\ 1 & 0 & 0\\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1/2\\ -1 & -1 & 0\\ -1/2 & 0 & -1/2\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{B=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -2 & -2 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}}.$$

****

6º) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calcular A^{-1} y A^{20}, utilizando necesariamente la siguientes identidad: $A^3=-I$, donde I es la matriz identidad.

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=12+15-16-12=-1. \qquad A^t=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 4 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ A^t=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}=\frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}}{-1} \Rightarrow \underline{A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}}.$$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$\Rightarrow A^3=-I.$

$$A^{20}=A^{18+2}=A^{6\cdot 3}\cdot A^2=(A^3)^6\cdot A^2=(-I)^6\cdot A^2=I^6\cdot A^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{A^{20}=A^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}}.$$

****

7º) Hallar la ecuación de una recta s, tal que:

1) Pasa por el punto $P(1, 1, 1)$.

2) Es paralela al plano $\pi \equiv x + y - 2z - 3 = 0$.

3) Es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$.

Un vector normal del plano $\pi \equiv x + y - 2z - 3 = 0$ es $\vec{n} = (1, 1, -2)$.

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (1, -1, -2)$.

El vector director de la recta s pedida es perpendicular, simultáneamente, a los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\vec{n}$, o sea: es linealmente dependiente del producto vectorial $\overrightarrow{v_r} \times \vec{n}$.

$$\overrightarrow{v_r} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2i - 2j + k + k + 2i + 2j = 4i + 2k = (4, 0, 2) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overrightarrow{v_s} = (2, 0, 1)$.

$$\underline{s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{1}}.$$

****

8º) Calcular el valor del parámetro real a para que las rectas $r \equiv \begin{cases} 4x + z = a \\ x + y = 2 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2z = 2a \end{cases}$ se corten y calcular este punto.

Las rectas r y s determinan el sistema $\left. \begin{array}{r} 4x + z = a \\ x + y = 2 \\ x + y + z = 0 \\ x + 2z = 2a \end{array} \right\}$.

Para que las rectas r y s se corten en un punto es condición necesaria que el sistema que forman sea compatible determinado, que, según el teorema de Rouché-Fröbenius, los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada tienen que tener el mismo rango, que ha de ser igual al número de incógnitas, que es tres, por lo cual, el determinante de la matriz ampliada tiene que ser cero:

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_2\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2a \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & a \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2a \end{vmatrix} = 0;\ \ 8a - 2 - a + 16 = 0;\ \ 7a = -14 \Rightarrow \underline{a = -2}.$$

Para determinar el punto de corta consideramos el sistema $\left. \begin{array}{r} 4x + z = -2 \\ x + y = 2 \\ x + y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{r} z = -2 - 4x \\ y = 2 - x \end{array} \right\} \Rightarrow x + (2 - x) + (-2 - 4x) = 0;\ \ x + 2 - x - 2 - 4x = 0;$$

$$-4x = 0;\ \ x = 0;\ \ y = 2;\ \ z = -2 \ \Rightarrow \ \underline{P(0, 2, -2)}.$$

****

9º) El tiempo que una persona tarda en llegar a su lugar de trabajo sigue una distribución normal de media 20 minutos. Se ha comprobado que el 84,1 % de los días llega antes de 22 minutos. Si durante el año acude a su lugar de trabajo 290 días, ¿cuántos días puede estimar que tardará menos de 18 minutos en llegar?

$Datos$: $\mu = 20$; $P(X < 22) = 0{,}8410$.

$X \rightarrow N(\mu;\ \sigma) = N(20, \sigma)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-20}{\sigma}$.

Se trata de determinar σ tal que:

$$P = P(X < 22) = 0{,}8410 \Rightarrow P\left(Z < \frac{22-20}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{2}{\sigma}\right) = 0{,}8410.$$

Mirando de forma inversa en la tabla $N(0{,}1)$ a 0,8410 le corresponde, aproximadamente, el valor 1: $\frac{2}{\sigma} = 1 \Rightarrow \underline{\sigma = 2}$.

$$P = P(X < 18) = P\left(Z < \frac{18-20}{2}\right) = P\left(Z < -\frac{2}{2}\right) = P(Z < -1) =$$

$$= 1 - P(Z < 1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587.$$

$$n = P \cdot N = 0{,}1587 \cdot 290 = 46{,}023.$$

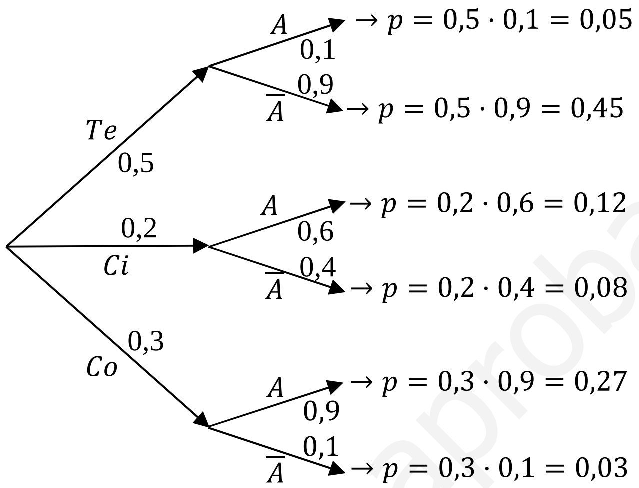
$\underline{Se\ estima\ que\ tardará\ menos\ de\ 18\ minutos\ en\ llegar\ al\ trabajo\ 46\ días}$.

****

10º) Sofía va al teatro, cine o de concierto con probabilidades 0,5; 0,2 y 0,3. El 60 % de las veces que va al cine se encuentra con amigos y se va de cena con los amigos. Lo mismo le ocurre el 10 % de las veces que va al teatro y el 90 % de las que va de concierto.

a) ¿Qué probabilidad hay de que se vaya de cena con los amigos?

b) Si vuelve a casa después del espectáculo, ¿qué probabilidad hay de que haya ido al cine?



a)

$$P = P(A) = P(Te \cap A) + P(Ci \cap A) + P(Co \cap A) =$$

$$= P(Te) \cdot P(A/Te) + P(Ci) \cdot P(A/Ci) + P(Co) \cdot P(A/Co) =$$

$$= 0,5 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,9 = 0,05 + 0,12 + 0,27 = \underline{0,44}.$$

b)

$$P = P\left(Ci/\overline{A}\right) = \frac{P\left(Ci \cap \overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \frac{P(Ci) \cdot P\left(\overline{A}/Ci\right)}{1 - P(A)} = \frac{0,2 \cdot 0,4}{1 - 0,44} = \frac{0,08}{0,56} = \underline{0,1429}.$$

****